JUAN CARLOS SÁNCHEZ HUETE
JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ BRAVO

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas

EDITORIAL CCS

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas

Colección **CAMPUS**

27

Últimos títulos publicados:

25. Didáctica de la educación física. J.L.Chinchilla / Ma L.Zagalaz

26. Diversidad con calidad. L.Álvarez/ E.Soler/ J.A.González-Pienda / J.C.Núñez / P.González-Castro (coords.)

27. La enseñanza de la matemática. J.C.Sánchez /J. A.Fernández

28. Teoría y práctica de la educación. V.Martínez-Otero

29. Investigar. Metodología y técnicas del trabajo científico. J.M.Prellezo / J.M.García

30. Guía de recursos para la evaluación del lenguaje. J.M.Moreno / Ma E.García-Baamonde

31. Equipos y Departamentos de Orientación. L.Álvarez / G.Fernández

32. Discapacidad intelectual. J.González-Pérez

33. Necesidades educativas específicas. E.González (coord.)

34. Ciencias físicas en Primaria y Secundaria. J.Lahera / A.Forteza

35. Psicología de la Educación para una enseñanza práctica. J.González-Pérez / Ma J.Criado

36. Psicología de la Educación y del Desarrollo en la Edad Escolar. E.González / J.A.Bueno (coords.)

37. Estrategias para mejorar la práctica docente. Jesús Ma Nieto

38. Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica. Víctor Santiuste / Joaquín González-Pérez

39. Lenguaje y nuevas tecnologías. Ma Isabel Reyzábal / Víctor Santiuste

40. Educar y reeducar el hablar con cuentos. Ángel Suárez / J.M.Moreno / Ma E.García-Baamonde

41. La intervención en educación especial. F.Peñafiel / J.Fernández / J.Domingo / J.L.Navas (coords.)

42. La evaluación de aprendizajes. AA. VV.

43. Educación infantil: orientaciones y recursos metodológicos para una enseñanza de calidad. José Quintana) / Emilio Miraflores (coords.)

44. Estadística básica aplicada a la educación. José Carlos Sánchez Huete

45. Comunidad educativa. Valentín Martínez-Otero

46. AT hoy. lan Stewart/Vann Joines

47. Artículos seleccionados de Análisis Transaccional. Margery Friedlander (ed.)

48. La educación no formal y diferenciada. César Torres / José Antonio Pareja (coords.)

49. Análisis Transaccional I.Francisco Massó

50. La inteligencia afectiva. Valentín Martínez-Otero

51. Educación Primaria: orientaciones y recursos metodológicos para una enseñanza de calidad. José Quintana) / Emilio Miraflores (coords.)

52. Análisis Transaccional H.Francisco Massó

53. Compendio de didáctica general. Juan Carlos Sánchez Huete (coord.)

54. El discurso educativo. Valentín Martínez-Otero

55. Introducción a la estadística. Joseph Mafokozi

56. Personalidad, madurez humana y contexto familiar. José Antonio Ríos González (dir.)

57. Parálisis cerebral. AA. W.

58. Aprendiendo a enseñar. Lucía Hernández 1 Ma Ángeles Caballero

59. Fundamentos de Física para el grado de Magisterio. Jesús Lahera Claramonte

Juan Carlos SÁNCHEZ HUETE José Antonio FERNÁNDEZ BRAVO

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas

Editorial CCS

Tercera edición: mayo 2010.

Página web de EDITORIAL CCS: www.editorialccs.com

© Juan Carlos Sánchez / José Antonio Fernández

© 2003. EDITORIAL CCS, Alcalá, 166 / 28028 MADRID

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de la propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y ss. del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (www.cedro.org) vela por el respeto de los citados derechos.

Diagramación editorial: Concepción Hernanz

ISBN (pdf): 978-84-9842-419-5

Fotocomposición: M&A, Becerril de la Sierra (Madrid)

A Andrea y Carlos.
A Erika y Alejandro.

Toda educación científica que no se inicia con la Matemática es imperfecta en su base.

(Compte)

La naturaleza está escrita en lenguaje matemático.

(Galileo)

Índice

Prólogo

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y BASES PSICOPEDAGOGICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

(Juan Carlos SÁNCHEZ HUETE)

1. LA CONSTRUCCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS Y SU NECESIDAD

2. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

21. La controvertida «Matemática Moderna». Orígenes. Situación didáctica en nuestro país. Fundamentación teórica de la nueva Matemática. La Didáctica de las Matemáticas según Piaget

2.2. Las Orientaciones Pedagógicas. Consecuencias de una implantación precipitada

2.3. Análisis de los Programas Renovados. La incidencia en la práctica docente. ¿Cumplió el libro de texto el programa oficial?

3 . PROCESO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. Nivel de concreción de las ideas en los textos escolares actuales. Inserción en los intereses del alumno. Exposición de conceptos. Presentación de los contenidos de las Matemáticas

4. PRINCIPIOS DEL APRENDIZAJE

4.1. Principios del aprendizaje del paradigma conductual

4.2. Principios del aprendizaje general de Burton

4.3. Principios del aprendizaje general de Heredia Ancona

4.4. Principios del aprendizaje lógico de las Matemáticas de Piaget

4.5. Principios psicopedagógicos básicos de la enseñanza de la Matemática Moderna de Piaget

4.6. Principios del aprendizaje significativo de Ausubel

4.7. Principios del aprendizaje significativo (LOGSE)

4.8. Principios de la Matemática Realista

4.9. Principios del aprendizaje de las Matemáticas del Informe Cockcroft

4.10. Ideas de Piaget: períodos evolutivos

4.11. «Operacionalización» de los principios del aprendizaje

5. TIPOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

5.1. Memorización

5.2. Aprendizaje algorítmico

5.3. Aprendizaje de conceptos

5.4. Resolución de problemas

6. TRATAMIENTO EN LOS LIBROS DE TEXTO ACTUALES DE LOS CUATRO TIPOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

6.1. Enfoque metodológico de la resolución de problemas en los libros de texto de Matemáticas

7. CONCLUSIONES FINALES

7.1. Importancia práctica e implicación general del estudio

7.2. Derivaciones educativas

7.3. Datos de interés para el estudio (anexos)

Bibliografía

SEGUNDA PARTE

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y BASES PSICOPEDAGÓGICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

(José Antonio FERNÁNDEZ BRAVO)

8. INTRODUCCIÓN: LA CUESTIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO O LOS PROBLEMAS CIENTÍFICOS

8.1. Respecto a la enseñanza del profesor

8.2. Respecto al aprendizaje del alumno

9. INTERÉS POR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

9.1. La interpretación pedagógica del nuevo movimiento

10. RELACIONES Y CONTROVERSIAS ENTRE LA DEFINICIÓN DE PROBLEMA MATEMÁTICO Y SU EDUCACIÓN MATEMÁTICA

10.1. La resolución de problemas en las tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la matemática

10.2. El concepto de problema en la educación matemática

10.3. La construcción del conocimiento matemático en la resolución de problemas. El concepto de «problema matemático» que tienen los

escolares, según Fernández Bravo. Las dificultades presentadas por los alumnos en la resolución de problemas matemáticos

11. CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS SIMPLES

11.1. Problemas de tipo aditivo

11.2. Problemas multiplicativos

11.3. Otra clasificación de problemas matemáticos simples. En función de los conceptos matemáticos que asimilan los alumnos. En función de la exigencia que plantean al que los resuelve

12. PROTOCOLO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ESTRUCTURA, DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS FASES

12.1. Enumeración y análisis de las fases. Una perspectiva histórica

13. VARIABLES INTERVINIENTES EN EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13.1. Variables intrapersonales. Variables cognitivas. Variables según la formulación del problema. Variables en la formación del aprendizaje

13.2. Variables situacionales. Metodología didáctica para la enseñanza de la resolución de problemas

13.3. Variables socioculturales

14. MÉTODOS, TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

14.1. Exposición de métodos para la resolución de problemas matemáticos. La invención como método. Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas, para el método de invención, según Fernández Bravo

14.2. Estrategias utilizadas por los escolares. Estrategias de adición y

sustracción. Estrategias de multiplicación y división

Bibliografía

Prólogo

Como educadores, en general, y profesores de Matemáticas, en particular, nos han preocupado los bloqueos y fracasos que bastantes alumnos han padecido con esta asignatura. Por eso, y porque creemos firmemente que sólo desde la propia experiencia se facilita la construcción del conocimiento, abogamos por didácticas y metodologías apoyadas en el razonamiento propio; de esta forma se puede llegar a planteamientos más abstractos y a utilizar un pensamiento más formal.

En infinidad de ocasiones, los docentes olvidamos que la Matemática es una actividad mental que se genera estando en relación con el mundo físico. Sin embargo, queremos que los alumnos aprendan dichos conceptos sin experiencias previas; simplemente se les introduce de lleno en complicadas abstracciones, que a la propia humanidad le ha costado realizar cientos de años.

En la primera parte del libro se presentan fundamentos teóricos para la construcción del conocimiento matemático y bases psicopedagógicas que lo sustentan. Nuestros esfuerzos se dirigen, desde una perspectiva histórica, a introducirnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y en cómo han ido transformándose desde las reformas producidas en nuestro sistema educativo durante las últimas décadas.

Estas reformas educativas han desarrollado cambios metodológicos y didácticos en la configuración curricular de las Matemáticas. Y con esta consideración intentamos profundizar en el contenido de los programas oficiales, en su caracterización desde la epistemología científica de la Matemática, en el diseño de los libros de texto desde la «operacionalización» de los principios del aprendizaje, en los períodos evolutivos, y en los intereses de los alumnos.

La segunda parte aporta, desde las etapas iniciales del aprendizaje, un análisis teórico de los estudios sobre la resolución de problemas matemáticos. Se expresa con un lenguaje coloquial y responde a un riguroso análisis científico cuya intención señala, como esencial, el aporte de ideas que permitan despertar en el lector estrategias válidas y creativas para el diseño de originales actividades; eficaces por su innovación y eficientes en su desarrollo. Todo planteamiento práctico, reconocido por la enseñanza en el aprendizaje de la Matemática, apoya, al menos sus procesos, en firmes argumentos que se pueden inferir fácilmente de probadas teorías; dilatados esfuerzos y años de investigación que giran en torno a un objetivo central: mejorar el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

En los años ochenta, la resolución de problemas constituye una importante reflexión. En los congresos internacionales de educación matemática, particularmente en Adelaida (ICME-4, 1984) y Budapest (ICME-5, 1988), se convirtió en una corriente esencial para poner en práctica tratamientos didácticos enfocados a procesos específicos de resolución. En esta década fue objetivo principal de la enseñanza de la matemática, según la recomendación del documento An agenda for action publicado por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics). Desde entonces, la preocupación en las escuelas, instituciones e investigación porque la resolución de problemas fuese una actividad del pensamiento, ha generado una inquietud de búsqueda por dar solución a lo que, una vez más, se identifica como «fracaso escolar>. Los datos que se recogen sobre cómo actúan los escolares revelan una incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias procesuales en las que, generalmente, interviene el azar y no el razonamiento; la impetuosa necesidad de llegar a un resultado es lo que más le importa al alumno. La iniciativa, la creatividad, la concentración y la asimilación de técnicas de base en la resolución de situaciones, son escasas y están subrayadas por una reiteración de

movimientos apoyados en la imitación de intenciones vacías - muchas veces no comprendida-, y, por tanto, desnaturalizada en los procesos y resultados. La participación, la autoestima y la seguridad el alumno, así como el gusto por la tarea mencionada, intervienen habitualmente de forma negativa.

La ausencia en los docentes de un sólido conocimiento teórico les lleva a dirigir la tarea escolar, de resolución de situaciones problemáticas, de forma rutinaria; cuyo único objetivo es llegar a la solución esperada, y cuya resolución depende de la imposición de lugar en la secuenciación de un tema; sin hablar de la verificación del problema que consiste en la aprobación, por el profesor, de la validez de la estrategia. Las situaciones problemáticas, que aparecen en algunos cuadernos de trabajo o en los libros de texto elegidos, se alejan considerablemente de sus experiencias e intereses, dejando al margen cualquier brizna de participación imaginativa que pudiera nacer en el aula; desconsiderando, por la inexistencia de campos de posibilidades de acción creativa: la motivación, que sirve para actualizar sus necesidades; y la seguridad que ofrece poder equivocarse como canal de investigación en el proceso del aprendizaje.

La Asociación Nacional de Educación, en una declaración de 1961 titulada El objetivo central de la educación, expone: «El objetivo que dirige y fortalece a todos los otros objetivos de la educación - el hilo común de la educación - es el desarrollo de la capacidad para pensar> (MAYER, Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona. Piadós, 1986, p. 91). Una de las funciones más representativas de la resolución de problemas consiste en ayudar a los alumnos a acercarse lo más posible a ese objetivo central.

Este libro pretende ser una herramienta de estudio y análisis teórico para la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas, con aportaciones claves a toda investigación dirigida a mejorar la práctica de aula, en la enseñanza obligatoria. Desde este planteamiento, va dirigido a todos

aquellos profesores, pedagogos, psicólogos, psicopedagogos, educadores, estudiantes, investigadores... que quieran profundizar en fundamentos y bases psicopedagógicas de la enseñanza de la Matemática.

Buscando, entonces, resultados más positivos desde la Metodología Didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, se presenta este estudio teórico. No tiene más afán - humilde disposición-, que recoger las conclusiones que diversas investigaciones han aportado al tema. No podemos terminar sin levantar la voz, a petición de disculpa, por esas largas citas y esa exhaustiva relación de autores; resumir y elegir textos cuesta mucho trabajo cuando lo que se lee es fruto de un importante esfuerzo intelectual; siempre nos quedará el consuelo - ¡esperemos! - de no haber omitido algo fundamental.

Los autores

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y BASES PSICOPEDAGÓGICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Juan Carlos Sánchez Huete

Capítulo **1**

La construcción de las Matemáticas y su necesidad

Las Matemáticas, del griego «mátheema» (ciencia), se significan por su aspecto formal y abstracto y su naturaleza deductiva. Su construcción, en cambio, se une a una actividad concreta sobre los objetos para la que el alumno necesita de la intuición como proceso mental. Desde este tipo de elaboración, las Matemáticas son más constructivas que deductivas y, si no fuera así, seguro que se convertirían en una ciencia memorística, lejos de su carácter de representación, explicación y predicción de la realidad.

El pensamiento matemático es un proceso mediante el cual es factible aumentar el entendimiento de aquello que nos rodea. Aserto trasladable a la disciplina académica de las Matemáticas, no tanto como cuerpo de información y técnicas, sino como método para hacer trabajar la mente.

Tal es la proposición de este fin, que justificaríamos nuestra presencia como docentes si lográramos en los alumnos afianzar su propia capacidad de pensar, de realizar preguntas fundadas, de bloquearse con ciertas conjeturas de las que les resulta difícil salir, pero no imposible.

El sistema educativo, implantado con la LOGSE en la década de los noventa, apostaba abiertamente por este tipo de metodologías y estrategias como la de «aprender a aprenden» o la de «aprender a pensar». No obstante, es de justicia reconocer que llevan ya tiempo en circulación y no se está descubriendo algo nuevo. Como decía BRUNER (1960: 20) allá por los sesenta, es necesario abogar por un estudio más racional, más sensible al uso de la mente que la simple memorización y adaptación.

Desde esta concepción para entender las Matemáticas, y de su ulterior trasvase a las aulas, surgen los Principios de la Matemática Realista:

-Contribuye al bagaje cultural de las personas.

-Intenta salvar el dualismo saber-utilizar Matemáticas.

-No debe ser separada de las demás ciencias.

OPERACIONALIZACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DE LA MATEMÁTICA REALISTA

Con esta operacionalización son dos los factores que se antojan imprescindibles en el diseño del proceso de instrucción de las Matemáticas:

1°.El uso y fomento de los procedimientos intuitivos, como mediación para explorar y construir formalmente el conocimiento matemático.

2°.El conocimiento de los alumnos, en cuanto a las ideas previas que poseen y al grado de dificultad que pudieran manifestar por el nivel de desarrollo intelectual alcanzado.

Si basamos la instrucción de las Matemáticas como mera imitación de modelos, la utilidad que a posteriori se haga de ella estará limitada. Sólo en situaciones parecidas a las de su aprehensión serán eficaces (LÓPEZ CARRETERO 1988: 235).

Toda disciplina curricular marcada por un carácter de cientificidad posee una jerarquía en su contenido. Es lo que determina la estructura interna para organizar y relacionar todas las partes. Una de las dificultades de enseñar y aprender Matemáticas estriba en su naturaleza jerarquizada (COCKCROFT 1985: 82; SKEMP 1980: 36) y en el problema de definir jerarquías con precisión y exactitud para todos los contenidos matemáticos (ORTON 1990: 74).

Las Matemáticas no son, precisamente, un conjunto de elementos sin cohesión interna. Su aprendizaje asigna una secuencia temporal específica, donde unos conceptos se articulan sobre el conocimiento de otros, de manera que, en algunas ocasiones, esa necesidad lleva a realizar una instrucción tangencial de aspectos necesarios para la comprensión de aquéllos (ejemplos: la suma, anterior a la multiplicación; los números naturales, antes que los racionales; los números y las medidas de longitud, previos a la geometría). Más adelante citaremos los dos principios básicos del aprendizaje de las Matemáticas y volveremos a incidir sobre este aspecto.

La instrucción de las Matemáticas viene muy condicionada, pues, por su propia estructura interna. La naturaleza del proceso de su construcción obliga a volver periódicamente sobre los mismos contenidos con niveles de complejidad, abstracción y formalización crecientes. En términos operativos, autores como Resnick o Gagné, han señalado la secuencia de constitución de una jerarquía de aprendizaje. En primer lugar se designa el objetivo que se persigue. Una vez fijado, se analiza la tarea requerida para estimar qué capacidades previas se necesitan para lograr la capacidad final.

Otra característica es la vía metodológica que se precisa para esta

construcción. No es única. Tampoco podemos referirnos a una específica como la mejor. Simplemente la apropiación será más idónea según la propuesta y dependerá, fundamentalmente, del estilo cognitivo de cada alumno. La concepción constructivista del proceso de enseñanza/aprendizaje afirma que es el alumno quien construye sus propios aprendizajes, sin olvidar ayudas mediadoras de otros factores intervinientes: profesor, materiales curriculares... Este proceso no es una oferta de contenidos que cualquier alumno, y en cualquier circunstancia, deba integrar a su bagaje académico; se precisa, más bien, estrategias adecuadas para satisfacer la necesidad de aprendizaje de cada alumno.

Según Piaget, cuando el alumno inicia la construcción de nociones Matemáticas, lo realiza cohesionándolas a la situación concreta en que se le presentan. Esto avala la necesidad de una presentación formal desde el propio entorno y la imposibilidad de argumentar situaciones abstractas, sin más.

La diversidad del alumnado al que dirigimos los conocimientos ofrece diferencias que residen en las capacidades y motivaciones para aprender, lo que supone una adaptación individualizada de objetivos, contenidos, métodos de enseñanza, organización del aula, evaluación, etc., que facilite el ajuste de esos alumnos a sus propias necesidades de aprendizaje. No es posible dictaminar el método de enseñanza válido desde la generalidad, ni para todo el alumnado ni para todos los contenidos. Cada alumno posee su propio estilo de aprendizaje y cada contenido su particular forma de abordarlo.

Deducimos que debemos enfrentarnos a las dificultades y paliarlas en lo posible, buscando unas características de la metodología que hagan posible la doble adecuación, principios del aprendizaje y estilo de cada alumno. Esas características son:

-La globalización (facilita la relación entre los contenidos).

-La participación activa.

-La motivación.

-La ausencia de metodologías unidireccionales.

Investigaciones sobre la naturaleza de la comprensión matemática están de acuerdo en que dicho entendimiento supone una capacidad específica de reconocer y usar un concepto matemático en diferentes contextos. Skemp distingue dos tipos de comprensión:

-Comprensión «relacional», utilizada para saber cómo desenvolverse en los casos concretos y permitir posicionarnos en procedimientos con el fin de procurar conocimientos matemáticos más generales.

-Comprensión «instrumental»; es una memorización - pura y dura - de reglas para aplicar en cada caso concreto sin llegar a discernir su funcionamiento.

¿Para qué aprendemos Matemáticas? ¿Qué fines persigue su enseñanza? Formalmente se pretende conocer los valores universales del aprendizaje matemático: facilitación de medios para razonar y pensar mejor. En la práctica, la organización del currículo busca una referencia en lo que puede denominarse valor social: para enfrentarse a las necesidades de la vida. El Informe Cockcroft (COCKCROFT 1985: 82) señala que bastantes de las necesidades matemáticas de los adultos se traducen en una especie de «sensibilidad para los números» y una «sensibilidad para la medida».

La época actual se caracteriza por un extenso campo de aplicación de las Matemáticas a cualquier actividad cotidiana: agricultura, ganadería, biología, ingeniería, demografía, medicina, sociología, política, actividades tecnológicas, industriales, comerciales, administrativas... incluso, desgraciadamente, en acciones bélicas. Es irrefutable el hecho de que se ha llegado a la técnica actual gracias al concurso de esta rama del saber, y que los conocimientos matemáticos se utilizan, de una u otra manera, a cada

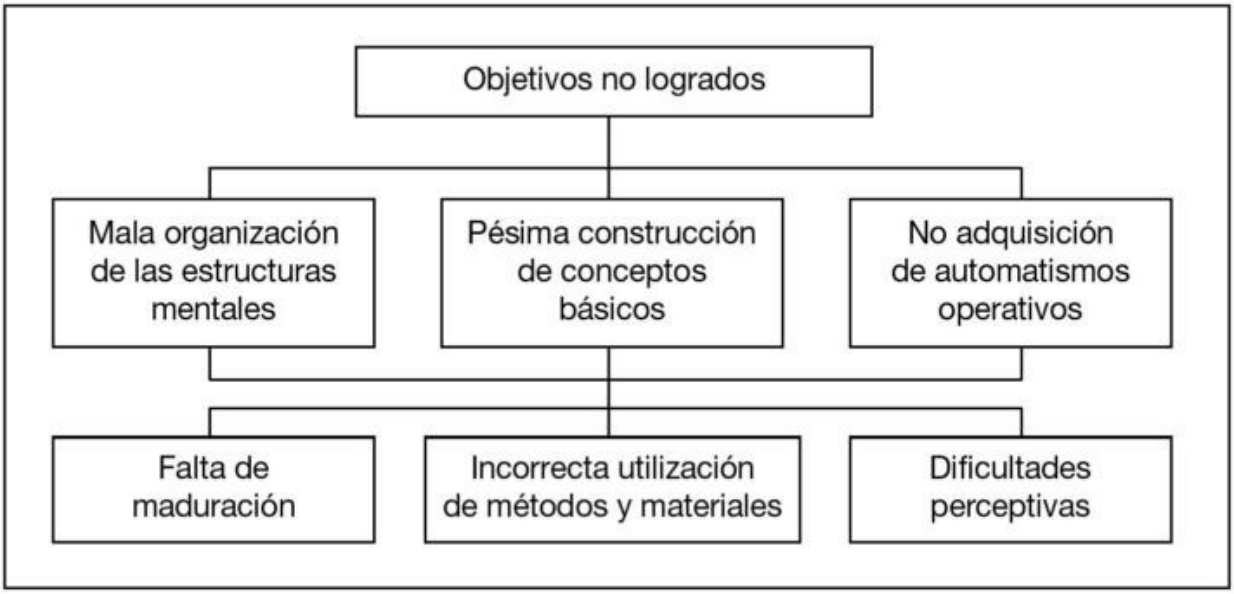
instante. No cabe duda de que la construcción de la realidad circundante está impregnada por las Matemáticas. Además, una formación matemática acostumbra a los alumnos a sobrepasar la realidad concreta para traducirla a una nueva lengua depurada, más abstracta, que confiere una capacidad de razonamiento muy potente (MIALARET 1977: 13).

Muchos padres y profesores ven en la enseñanza del cálculo y más tarde en la iniciación matemática, el medio de proporcionar al alumno habilidades y destrezas para resolver los problemas que encontrará en la vida real. Nuestros propósitos deben ir más allá e insistir en la formación intelectual que brinda una buena enseñanza de las Matemáticas. Ésta aspira a que se consigan elaborar técnicas generales para actuar ante situaciones de problema y desarrollar estrategias mentales, de tipo lógico, que permitan a los alumnos aproximarse a campos amplios del pensamiento y de la vida (AIZPUN 1983a: 910).

Ha de señalarse al respecto, que la lógica de las Matemáticas no tiene por qué ser la misma que la de cualquier otra actividad mental, aunque sí puede ser transferible como destreza a otro campo donde se reproduzcan elementos idénticos. No vamos a negar que todas las disciplinas curriculares tienen su importancia, pero una formación matemática aporta al individuo un enriquecimiento conceptual difícil de ofrecer por otra disciplina.

Nuestra experiencia docente desarrollada durante varios años en dos sistemas educativos distintos - EGB de la ley de 1970 y Educación Primaria LOGSE- ha sido de gran ayuda en el análisis de esta asignatura, de manera especial en la perspectiva de los objetivos no logrados. Esta no consecución se debe, fundamentalmente, a tres razones: la mala organización de las estructuras mentales, la pésima construcción de conceptos básicos y la no adquisición de automatismos operativos.

CAUSAS DE LA NO CONSECUCIÓN DE OBJETIVOS EN MATEMÁTICAS



No obstante, la problemática del aprendizaje de las Matemáticas no debe constreñirse sólo a estas tres causas. De ellas derivan otros motivos que conducen a fracasos más específicos en esta área.

Esta diversidad de causas viene dada por el amplio abanico que la enseñanza de las Matemáticas brinda. Unos cifran el objetivo primordial en lo más pragmático, una enseñanza que forme para la vida cotidiana, lo que prácticamente eliminaría todo lo que no fueran las cuatro operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) y la proporcionalidad, entendida esta última como una técnica útil de resolución de problemas. Es por eso su importancia y consideración para iniciar a niños muy pequeños en ciertos aspectos de la razón.

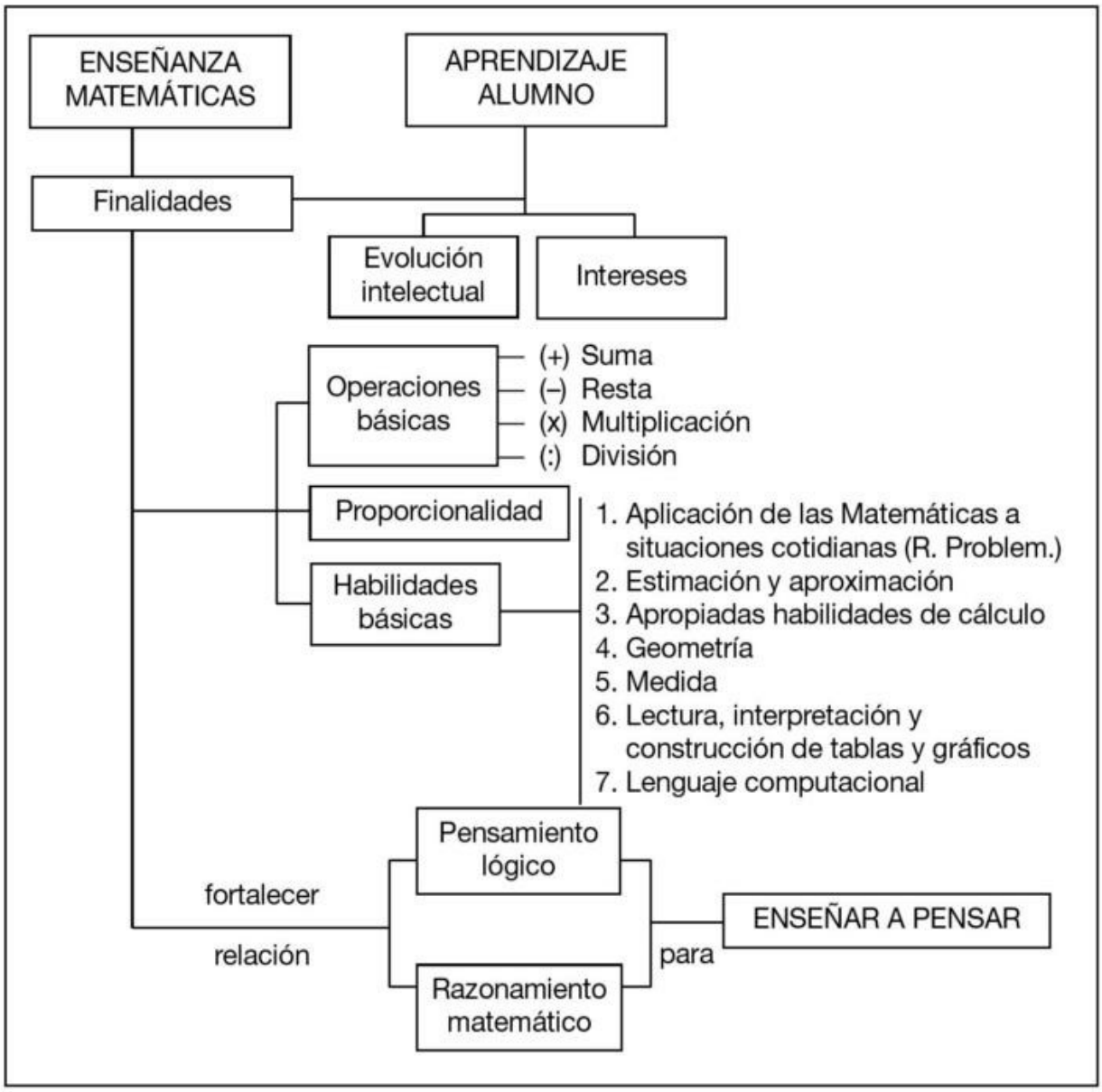
Esto no es lo principal para otros, que basan la enseñanza de esta asignatura en la relación pensamiento lógico y razonamiento matemático (enseñar a pensar). Es preciso ampliar el programa de Matemáticas para la consecución de este objetivo con el tratamiento de las habilidades básicas que permiten adaptarse continuamente a los cambios del proceso de enseñanza/aprendizaje y, en consecuencia, a las necesidades que éstos impongan. No ha de ignorarse que el desarrollo de nuevos conceptos y

conocimientos depende de las habilidades intelectuales básicas.

La postura idónea es pretender ambas finalidades porque no son excluyentes, sino totalmente complementarias, y esta propuesta dirigida a alumnos en edades comprendidas entre los ocho y los doce años es la que, de forma simplificada, proyectamos en el cuadro siguiente.

Es muy importante estimar la evolución intelectual del niño y sus intereses, procurando que la instrucción le proporcione una proyección práctica que le haga ver la utilidad de lo que está aprendiendo. No se han de ignorar las diferencias individuales y practicar una instrucción que asuma los distintos estilos de aprendizaje y la aptitud matemática que cada alumno manifieste.

PROCESO DE ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES



Aprender Matemáticas es un procedimiento extraordinario para adquirir y desarrollar capacidades cognitivas muy generales. Existen actividades como la resolución de problemas, la búsqueda de semejanzas y diferencias, la selección y aplicación de algoritmos, etc., que pueden favorecer la transferencia a otros dominios de aprendizaje.

Las Matemáticas son una creación de la mente humana y su enseñanza ha de consistir en auténticos procesos de descubrimiento por parte del alumno. Las Matemáticas no se aprenden, sino que se hacen (SÁNCHEZ HUETE,

1998: 143).

La Matemática es una ciencia donde prevalece el método sobre el contenido, de ahí la tendencia generalizada de subrayar la importancia de basar la enseñanza en los procesos de pensamiento matemáticos subyacentes en la resolución de problemas, más que en la simple transferencia de contenidos. Desde esta perspectiva, los objetivos que se planteen deben situarse en lo manipulativo y concreto e intentar conducir al alumno hasta lo simbólico y abstracto. Así se ha de conseguir la introducción de conceptos y procedimientos básicos para su ulterior ampliación, y la utilización de recursos de comprensión y exploración que permitan el paso de un estadio a otro. Por eso la importancia de las operaciones algorítmicas de suma, resta, multiplicación y división; la realización del cálculo mental; el uso correcto de la calculadora; la estimación de medidas y resultados; etc.

La enseñanza y el aprendizaje de estos contenidos debe contemplarse con especial atención y cuidado, considerando que el ámbito del conocimiento matemático ha generado un buen número de dificultades de aprendizaje en los alumnos a pesar de que no existiera, en muchos casos, otro tipo de deficiencia que lo justificara. En este sentido, es importante reflexionar que muchas dificultades se han producido por una enseñanza inadecuada y poco funcional de los contenidos matemáticos.

El estudio prematuro de ciertos contenidos puede ser causa de bloqueos o fracasos, así como enfocar el aprendizaje desde leyes y principios generales para llegar supuestamente a su aplicación. Facilitar la construcción de un conocimiento en alumnos de estas edades, supone partir de la propia experiencia, buscando un apoyo concreto que favorezca la tarea. Sólo hacia el final de la Educación Primaria, los alumnos empiezan a estar en disposición de trabajar sobre planteamientos más abstractos y de utilizar un pensamiento más formal. En este sentido, manifiestar como se olvida que los conceptos de índole matemática se originan en el mundo físico y que, como educadores,

queremos que los alumnos adquieran dichos conceptos sin previas experiencias, simplemente metiéndoles de lleno en complicadas abstracciones que a la propia humanidad le ha costado realizar.

Sin embargo, algunos alumnos con dificultades de aprendizaje más graves, tienen problemas para acceder al pensamiento abstracto; es necesario que con ellos se sigan apoyos concretos y trabajo sobre contenidos más directamente relacionados con su experiencia directa.

En consecuencia, conviene enfatizar la necesaria funcionalidad de los aprendizajes en el área de las Matemáticas para los alumnos con necesidades más graves; los objetivos a conseguir y las actividades que se pueden proponer tienen su origen en los requerimientos de la vida escolar, familiar y social en general. Por ejemplo, reconocimiento de los dígitos, manejo del dinero... Los objetivos, pues, han de perseguir el incremento de las posibilidades de interacción social.

Capítulo **2**

Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

El enfoque deseado para abordar este proceso de enseñanza y aprendizaje es meramente cognitivo. Aun compartiendo la tesis de Popkewitz sobre el carácter mediatizador de algunas operaciones, tales como la selección de contenidos, que indican la direccionalidad del aprendizaje, creemos que la enseñanza de las Matemáticas parte de las características lógicas de su contenido científico.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas se inicia desde la intuición y progresivamente se acerca a la deducción. Esta forma de construir el conocimiento matemático relega, por una parte, cualquier intento de apropiarse mecánicamente de procedimientos y algoritmos para la resolución de problemas reales. Por otro lado, vincula este proceder a una planificación de su enseñanza y aprendizaje fundamentadas en el nivel de cognición de los alumnos.

Es necesario considerar cuáles son las diferentes fases del desarrollo del psiquismo durante el período de la «tercera infancia» (siete años hasta la pubertad, aproximadamente).

En el niño aparece cierta capacidad crítica y un sentimiento de imposibilidad ante ciertas cosas. El pensamiento llega a la lógica y adquiere una coherencia que antes no tenía, de la que son testimonio las numerosas adquisiciones intelectuales que hará a partir de este momento. Sin embargo, hay que formular respecto a esta lógica una reserva importante: solamente razona de una manera lógica cuando puede manipular con los objetos a los que su razonamiento se refiere, y se muestra incapaz de hacerlo cuando se

trata de simples proposiciones verbales, e incluso cuando se transfiere este razonamiento a otros objetos. Por esto se la llama a esta etapa del pensamiento «lógico-concreto».

El niño puede resolver los problemas que se le plantean sobre la base de datos concretos y asequibles a una lógica que aún no es abstracta y reflexiva. Su inteligencia atraviesa una fase intermedia entre la forma de razonar intuitiva y la hipotético-deductiva. Su mente funciona según las siguientes características del razonamiento:

-Razonamiento verbal concreto: Estructurado por proposiciones cuya implicación es eficaz en términos concretos. No lo es tanto si se trata de conceptos más universales.

-Sincretismo del razonamiento: El hecho de que la inteligencia se mueva en un plano globalista provoca que la mente no proceda al análisis y comparación de términos, sino a su simple aprehensión.

-Subjetivismo intelectual: El sujeto no capta los objetos como realidades distintas, sino como fenómenos sin relación.

Lo más importante es que en el sujeto acaece un proceso psicológico de transformación hacia el razonamiento lógico y que las Matemáticas contribuyen sobremanera a ese cambio a través de un método de razonamiento excepcional: el deductivo.

La actividad docente y didáctica que se desarrolle ha de considerar, durante este período, una serie de modificaciones cognitivas importantes. Del conocimiento y uso de las técnicas instrumentales, se pasa a su dominio; desde los primeros tanteos realizados en la lógica de los números, se logra el dominio de los automatismos operativos.

Con estas consideraciones, es importante referirnos a los contenidos en un

contexto psicológico de maduración, adquirido por los alumnos progresivamente, desde las fuentes del conocimiento científico. En éste es preciso distinguir entre el conjunto de contenidos conceptuales interrelacionados, y el conjunto de sistemas, métodos, reglas y procedimientos que determinan la lógica de la investigación específica del área de conocimiento en cuestión, en nuestro caso de las Matemáticas.

Aprender contenidos matemáticos que puedan resultar provechosos, como las operaciones numéricas o la medida, no es un aval de una posterior aplicación adecuada. Un aprendizaje significativo obliga a que el alumno observe, pregunte, formule hipótesis, relacione conocimientos nuevos con los que ya posee, haga conclusiones lógicas desde los datos obtenidos. En definitiva, exige que construya en paralelo hechos, conceptos, principios, procedimientos y estrategias relativos al conocimiento matemático. Es importante distinguir estos elementos si queremos conocer el entendimiento que los sujetos practican de las Matemáticas.

El término «hecho» hace referencia a situaciones de información desconectadas o arbitrarias, sin estructura conceptual que lo acompañe. Por ejemplo son hechos los objetos, los sucesos, las situaciones, los símbolos...

El «concepto» es una clase de objetos, hechos o símbolos que poseen características comunes. BELL, COSTELLO y KücHEMANN (1983: 77-86) matizan este término haciendo referencia a «enseñar los conceptos», por estar más relacionada con los procesos psicológicos del aprendizaje. Aprender un concepto matemático es añadirlo a la estructura cognitiva existente.

Los «principios» son sistemas conceptuales o enunciados que describen la forma de relacionarse los cambios producidos en un objeto, hecho o situación, con las permutas que se originan en otro objeto, hecho o situación.

Los «procedimientos» son acciones o transformaciones realizadas para afrontar cuestiones matemáticas o resolver problemas que necesitan de

procesos estructurados. Son, en definitiva, destrezas, técnicas y habilidades.

Las «estrategias» son procedimientos que orientan acerca de la utilización de una habilidad o del conocimiento necesario para resolver un problema.

La controvertida «Matemática Moderna» 2.1

Orígenes 2.1.1

La introducción de la geometría analítica cartesiana, como rama a desarrollar dentro de la Matemática, buscaba un método susceptible de ser aplicado a todos los problemas. Esta forma de generalización no gustó a algunos matemáticos de principios del siglo xix, críticos a las insuficiencias lógicas de la construcción euclidiana. Su postura les hizo abordar los postulados y admitir, tras su estudio, las deficiencias del razonamiento geométrico. Pero además, descubren las estrechas relaciones de las Matemáticas y la Lógica, sentando las bases de una nueva teoría matemática, amparada en una determinada coherencia metódica. Es en esta dirección hacia la que se encamina la denominada escuela bourbakista, estandarte del esfuerzo enorme de axiomatización que pretende obtener de las Matemáticas su máxima pureza y reconciliarlas en la manera de razonar más completa con las leyes de la Lógica.

Otra corriente, la teoría de conjuntos de Cantor, se suma hacia 1870-1880 con la idea diáfana de ¡Abajo Euclides! mediante la imposición de nuevos contenidos como los conjuntos, las relaciones, el álgebra, la topología... Pareciera que la geometría elemental no constituyera un cuerpo importante dentro de las Matemáticas elementales y debiera dejarse para otros niveles.

Hacia 1930 comienza a usarse la expresión de «Matemática Moderna» para asignar una forma específica de organización de las Matemáticas. El intento pretende aunar las distintas áreas de las mismas en lo que se refiere al lenguaje y a la fundamentación empleados.

Las tendencias de la enseñanza de las Matemáticas en los años sesenta-setenta fueron de renovación y supusieron un cambio profundo por la introducción de contenidos nuevos. Aspiraban adecuar esta enseñanza a la estructuración del amplio campo que abarcan los conocimientos matemáticos. De todas formas, suscribimos las palabras de POPKF.WITZ (1989: 62), cuando afirma que el cambio y reforma en Matemáticas se justifica institucionalmente en torno a la actividad a desarrollar, en vez de cambiar los valores, conocimientos y efectos de la escolarización que se persigue transformar.

Las reformas de los currículos de ciencias y matemáticas de finales de la década 1960-1970, por ejemplo, nunca se implantaron en la escuela en la forma que se había deseado inicialmente.

El nacimiento de esta corriente como práctica educativa se asocia a infinidad de conferencias impartidas a finales de los años cincuenta, sobre todo en Estados Unidos y Europa, con el objeto de establecer unas bases comunes en la enseñanza de las Matemáticas. Este hecho provocó un fuerte desarrollo curricular de esta asignatura, amparado en unos principios que pretendían estimular al alumno a profundizar en su estudio, rellenar el vacío existente entre las Matemáticas escolares y las universitarias, y capacitar para el cambio producido en el mundo con la irrupción de las computadoras. Las Matemáticas modernas son un instrumento poderoso para abordar un buen número de problemas, pero a ciertos niveles. Si preguntaramos a todos los usuarios de las Matemáticas por la necesidad que de ella tienen, ¿qué resultados depararía el empleo de esta Matemática Moderna?

2.1.2 Situación didáctica en nuestro país

Ciñéndonos a nuestro país, Miguel de GUZMÁN (1989: 19-26) describe muy acertadamente la situación de cambio en la Didáctica de las Matemáticas. Se pretendió profundizar en el rigor lógico (teoría de conjuntos), en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

Se cultivó el álgebra en detrimento de la geometría. Denuncia, además, la ausencia de cualquier interés por sistematizar la Didáctica de la Matemática y como en las Facultades de Matemáticas la consideración hacia las personas que se dedican a la docencia está infravalorada con respecto a la investigación técnica, área bien colocada en un orden preferencial.

Quizá resulte un atrevimiento referirse a tal didáctica cuando en nuestro país no ha existido disciplinarmente, hasta hace bien poco, la Didáctica de las Matemáticas.

La Reforma Universitaria de 1984 establece la Didáctica de las Matemáticas como área de conocimiento de nivel universitario con el mismo rango que otras áreas, como por ejemplo la Geometría y el Álgebra.

Un breve recorrido histórico por la Universidad de Madrid nos descubre que en el período que abarca los cursos de 1963 a 1966 se habla de asignaturas optativas relacionadas con la enseñanza de las Matemáticas. En el curso 1966-1967 nos encontramos con tres ramas, una de ellas la de Metodología y Didáctica. Ya en el año académico 1970-1971 se trata con el rango de especialidad.

La consulta de diversas autoras, como Bujanda Jáuregui y Callejo de la Vega, ha creado la siguiente paradoja. Mientras la primera menciona que la especialidad de Metodología y Didáctica no existe en ninguna universidad española, salvo en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense, la segunda se refiere a cómo desde el año 1984 distintos departamentos de varias universidades - concretamente, Granada, Zaragoza, Valencia y Barcelona - han impulsado la creación de departamentos de Didáctica de las Matemáticas.

No cabe duda de que la Didáctica de las Matemáticas no se reduce a un buen conocimiento de ellas. Entran en liza factores que determinan cómo enseñarlas. Por ejemplo, la teoría de aprendizaje más idónea, la demanda

social del momento, la adecuación metodológica según los alumnos, etc. BROUSSFAU (1983: 93) manifiesta que...

> ... la didáctica es el estudio de los fenómenos de la enseñanza que son específicos del conocimiento enseñado sin ser reductibles al dominio del saber al que pertenecen.

Aludíamos anteriormente el contexto determinista donde suele actuar la didáctica. Un claro ejemplo de esta situación la encontramos en las primeras reformas curriculares realizadas en el ámbito de las Matemáticas. Quienes las diseñaron lo hicieron desde la fundamentación más científica; esto es, no atendieron al proceso de desarrollo curricular que sufren las Matemáticas -por supuesto, como cualquier asignatura-, sino que se dirigieron a la evolución que como ciencia habían experimentado. Honrosa excepción encontramos en Gran Bretaña, donde se creó el School Mathematics Project. Su informe de 1962-1963 afirma que sus principales objetivos consisten en hacer más interesantes las Matemáticas escolares e impartir los conocimientos sobre la naturaleza de esta ciencia y sus aplicaciones en el mundo moderno.

Fundamentación teórica de la nueva Matemática 2.1.3

La reforma educativa iniciada en el año 1970 con la Ley General de Educación y Financiamiento del Sistema Educativo, cuyos programas oficiales recibieron el nombre de Orientaciones Pedagógicas, diseña la Matemática según la estructura del grupo Bourbaki y con una concepción basada en la mal llamada, a nuestro entender, «Matemática Moderna»'. Entre otras cosas, BOURBAKI (1962) y DIEUDoNNE (1971) afirman que la finalidad de su enseñanza es la de...

> ... enseñar a ordenar y a encadenar los pensamientos con arreglo al método que emplean las Matemáticas, porque se reconoce que este ejercicio desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio.

Las Orientaciones Pedagógicas consideran que una de las funciones fundamentales es ordenar los conocimientos y crear estructuras formales que los recojan. Es necesario basar la enseñanza de las Matemáticas en el proceso de matematización de problemas, en la creación de sistemas formales y la utilización de leyes para obtener resultados e interpretaciones a los mismos. Estos presupuestos se relacionan con la concepción estructuralista y formalista que el denominado grupo Bourbaki propugna.

En 1959, la OECD auspicia el Seminario Royaumont, iniciador de la mencionada concepción y en donde se fundamenta la educación estructuralista de las Matemáticas, basada en la teoría de conjuntos. Se conciben las Matemáticas, desde un plano cognitivo, como un sistema organizado, cerrado y deductivo.

Dieudonné, defensor enconado del nuevo enfoque, hizo famoso el eslogan de «¡Abajo Euclides!» de la escuela tradicional matemática, posicionándose en una teoría deductiva que se iniciaba en axiomas básicos.

Hubo, por supuesto, posturas menos radicales, como la de Servais, que argumentaba una reconstrucción de las Matemáticas desde los fundamentos y de acuerdo con las ideas modernas. Éstas son, sobre todo, las referentes a la Teoría de Conjuntos.

Vredenduin, participante holandés en el Seminario Royaumont, desarrolló sus Matemáticas bajo la conceptualización estructuralista, y opinaba años después: «Un edificio maravilloso, pero no creo que haya un estudiante que comparta esta opinión».

En los años setenta se empezó a percibir que muchos de los cambios introducidos no resultaron acertados. Con la sustitución de la geometría por el álgebra, la matemática elemental se vació de contenidos y de problemas interesantes. La carencia de la intuición espacial fue otra de las desastrosas consecuencias del alejamiento de la geometría de nuestros programas, defecto

que se puede percibir muy claramente en las personas que realizaron su formación en aquellos años.

Thom critica en 1972 a los bourbakistas por abandonar tan sistemáticamente el campo ideal para el aprendizaje previo a la investigación: la Geometría Euclídea; ésta es un abundante filón de ejercicios. Además, la sustituyen por las generalidades de conjuntos y lógica, lo que a su entender es el material más paupérrimo, vacío y yermo para la enseñanza de las Matemáticas que jamás haya existido.

El nuevo currículo, propiciado por este enfoque, abrió principios pedagógicos que no relacionaban las Matemáticas con el mundo real. Este hecho lo reconoció Beberman (padre de la reforma de Estados Unidos). El mismo coloca en tela de juicio la adecuación de su propio programa al manifestar la creencia de que, en determinadas ocasiones, se intentan resolver preguntas que nunca vienen de los alumnos, sino aquellas otras provenientes de adultos y profesores. Esta opinión dice poco a favor de la educación realista de las Matemáticas.

En 1962 se publica un memorando que firman, entre otros, Ahlfors, Polya, Pollak, Morse, Klive y Birkhoff. En él se precisa que

> «conocer las Matemáticas significa ser capaz de hacer Matemáticas. usar el lenguaje matemático con fluidez, hacer problemas, criticar argumentos, encontrar pruebas y lo que debería ser la actividad más importante, reconocer un concepto matemático en, o extraerlo de, una situación concreta dada. Sin embargo, introducir nuevos conceptos sin un bagaje suficiente de hechos concretos, introducir conceptos unificadores donde no hay experiencia en unificación o trabajar en conceptos dados sin aplicaciones concretas que puedan provocar a los estudiantes, es más perjudicial que beneficioso: una formalización prematura podría desembocar en algo estéril, la introducción anticipada de abstracciones encuentra especial resistencia en mentes críticas que, antes de aceptar la

abstracción, desean saber por qué es relevante y cómo podría ser utilizada».

Freudenthal argumenta que las Matemáticas no son, jamás, un producto totalmente acabado y que no deben presentarse a los alumnos como tal. Advierte que la visión de los modernistas es una forma de hacer las Matemáticas excesivamente determinista, pues al poseer una estructura deductiva, la enseñanza de las Matemáticas procede conforme a esta estructura y muy particularmente, a ese especial sistema deductivo que propugne el profesor o el autor del libro.

TRF.FFERS (1986: 241) propugna una serie de principios sobre los que descansaría la «Educación Matemática enfocada de forma realista». He aquí algunos:

-Reinvención, consistente en recrear conceptos y estructuras matemáticas sobre nociones intuitivas que ya se poseen.

-La programación de la educación se guía por el principio histórico-genético más que por el método sistemático del contenido de la materia (planificación vertical).

-Es una enseñanza con significados apoyados en la realidad (matemáticamente rica).

Este panorama de críticas y objeciones a las Matemáticas «ad hoc» no se tuvieron en cuenta por el equipo encargado de efectuar el planeamiento del área en cuestión. ¿Por qué?

En España, los resultados son similares a la de otros sistemas educativos occidentales. BUJANDAJÁUREGUI (1981: 23) los califica de negativos desde la indiscutibilidad de los siguientes corolarios:

-Se abandonó Euclides para apoyar la metodología en la Teoría de Conjuntos.

-La incursión por esta teoría provocó la inflación de los programas. Era preferible, de todos modos, que el alumno dominara un vocabulario conjuntista, a costa de sacrificar nociones más sencillas. Ilustra la autora este acontecimiento con una frase muy oída durante la época: «el niño no sabe multiplican>.

-Escasa preparación del profesorado dentro de la nueva temática.

Para los autores que con vehemencia y ardor se debatieron por justificar la «Teoría de Conjuntos», debió resultar muy duro cómo esta secuencia de contenidos desapareció, en algunos libros de textos incluso antes de extinguirse el nivel educativo de la EGB. Se ha constatado que no sólo desaparecieron los temas de este contenido; también se actúo de igual forma con las «Magnitudes» y con la «suma en los sistemas binario o sexagesimal».

El tema de las «fracciones» genera una controversia inútil y absurda. Su dominio conceptual se ha traducido en una adquisición de primer orden en el te rreno matemático, cuando las investigaciones apuntan una ínfima aplicabilidad en la vida real.

Además, los docentes conocemos la idea que recoge la siguiente cita de ORTON (1990: 19):

> Casi todo lo que enseñamos respecto a las fracciones en primaria se plantea otra vez a la mayoría de los alumnos en la escuela secundaria porque no han llegado a dominarlo.

Seguimos tratando en estos cursos las fracciones como si se tratara de un contenido accesible para estas edades. La experiencia y la investigación corroboran que en cursos superiores es necesario, no ya refrescar ideas, sino volver a impartir contenidos.

Otro punto donde las investigaciones no coinciden es en la madurez

necesaria para abordar la significación del concepto de fracción y la operatoria que conlleva. Integrantes del equipo «Granada-Mats» (L.Rico y O.Saenz) confirmaron que...

> ... si bien el niño de tercer curso, y por supuesto de los siguientes, conoce qué es la mitad - el tercio (cuarto y quinto no parecen que sean una excepción a la significación), tal conocimiento es puramente mecánico en un altísimo porcentaje y que solamente en sexto curso (. se tiene dominio conceptual de esas nociones -v de sus relaciones recíprocas.

Por otra parte encontramos contenidos ignorados en los programas de estos cursos, como es el «valor posicional», cifrada su importancia como base conceptual principal de todo trabajo numérico (ORTON 1990: 22) y, sobre todo, para afrontar las operaciones de cálculo. Sobre este aspecto insistir en el aviso de GRAU 1 FRANCH (1988: 197) sobre el aprendizaje mecánico y no comprensivo del sistema de numeración posicional: conduce al niño a aplicar este contenido en momentos puntuales, pero la generalización de los mismos a contextos y operaciones de orden más complejo provoca desfases y retrocesos.

2.1.4 La Didáctica de las Matemáticas según Piaget

La enseñanza de las Matemáticas plantea un contrasentido en los alumnos de nivel intelectual alto que fracasan con estrépito en esta asignatura. Resulta complejo contestar por qué sujetos de estas características, con cierta facilidad en el uso de estructuras lógico-matemáticas, chocan con dificultades extremas en una instrucción de donde provienen las citadas estructuras.

Profesores y padres observan este acontecimiento con desesperación e ignoran que las estructuras operatorias de la inteligencia son estructuras de acciones que rigen el razonamiento, pero no son objeto de reflexión en sí mismas. Piaget ejemplariza esta situación utilizando el símil de la persona que canta sin saber leer música en una partitura.

Con la enseñanza de las Matemáticas ocurre algo semejante. La reflexión sobre las estructuras de esta materia implica la utilización de un lenguaje cargado de símbolos técnicos, muy específico y con una elevada carga de abstracción. Existirán alumnos incapaces de llegar a este nivel de realidad, aun en posesión de una inteligencia superior. El problema es un desajuste entre las estructuras espontáneas del sujeto con la metodología seguida en la instrucción matemática. Tan sutilmente, Piaget justifica la implantación de la Matemática Moderna. Resuelve la cuestión del desajuste de esta forma de conocimiento (matemático) con las estructuras operatorias fundamentales del pensamiento y, al mismo tiempo, consigue avalar los estudios de los bourbakistas. Critica la organización de las Matemáticas clásicas por su desajuste, sin una prolongación de unos temas en otros, y aplaude el esfuerzo de la escuela de Bourbaki, que consigue generar una vasta jerarquía de estructuras interrelacionadas. Las principales, «estructuras madres» en su propia terminología, son tres: «algebraicas», «de orden» y «topológicas».

¿Cómo se relacionan las estructuras elementales con las estructuras operatorias? En el cuadro siguiente se muestra esta conexión.

CORRELATO DE OPERACIONES CONCRETAS Y «ESTRUCTURAS MADRES» EN MATEMÁTICAS

OPERACIONES CONCRETAS	ESTRUCTURAS ELEMENTALES
Agrupaciones lógicas de clase	Algebraicas
Operaciones proposicionales	Algebraicas
Agrupaciones de relaciones	De orden
Operaciones proposicionales	De orden
Geometría espontánea	Topológicas

La crítica de PIAGET (1986: 56-57) hacia la Matemática Moderna la

realiza en el sentido de que...

> Inspirándose en las tendencias bourbakistas, (..) hace más hincapié en la Teoría de los Conjuntos y en los isomorfismos estructurados que en los compartimentos tradicionales; de aquí que se haya dibujado un movimiento que tiende a introducir en la enseñanza lo más pronto posible estas nociones. Tal tendencia está plenamente justificada porque precisamente las operaciones de reunión (sic) e intersección de conjuntos, la posición en correspondencia fuente de los isomorfismos, etc., son operaciones que la inteligencia construye y utiliza espontáneamente desde los 11-12 años. La inteligencia elabora y utiliza estas estructuras sin tomar consciencia en una forma reflexiva...

No deja de sorprendernos cómo se introducen en la instrucción primaria nociones y conceptos que hasta una edad tan avanzada - once o doce años- no se construyen convenientemente ni la inteligencia es capaz de utilizar de for ma espontánea. Con el sobreañadido de la escasa reflexividad que tal proceso genera en la mente de quien opera. Con cierta argucia, Piaget propugna buscar el método de trasvase de las estructuras naturales (carente de reflexión) a la introspección sobre tales estructuras y a su teorización.

El propio Piaget manifiesta que las estructuras más generales de las Matemáticas Modernas son al mismo tiempo las más abstractas, mientras que las mismas estructuras sólo están representadas en la mente de los niños en forma de manipulaciones concretas, materiales o verbales. Pero vuelve a «guardarse las espaldas» al hilo de la introducción que de las Matemáticas Modernas se realice en los cursos más primarios, puesto que los procedimientos empleados podrán o no ser los más idóneos. Es evidente la intencionalidad de «buscar culpables» del posible fracaso en elementos que no sean el propio alumno o las Matemáticas Modernas.

Promover ciertas actitudes se constituyen en un principio psicopedagógico que orienta la actividad docente en este sentido. Las más importantes son:

-Conducir al alumno a la formación de nociones para que descubra por sí mismo la naturaleza de las Matemáticas. O sea, el aprender a pensar que la nueva reforma del sistema educativo ha retomado con fuerza desde los posicionamientos de la teoría del «aprendizaje significativo».

-Experimentar los entes matemáticos antes de introducirle en el razonamiento deductivo. La manipulación es una excelente vía.

-Estudiar los errores de los alumnos para detectar cómo formalizan las Matemáticas. Conocer las ideas previas y los preconceptos es un inmejorable posicionamiento para acceder a aquéllos.

2.2 Las Orientaciones Pedagógicas

Las Orientaciones Pedagógicas creadas para la Educación General Básica se aprobaron según orden, del entonces Ministerio de Educación, el día 2 de diciembre de 1970. Permanecieron vigentes hasta principios de la década de los ochenta, momento donde fueron sustituidas por los Programas Renovados de los ciclos Inicial (1980) y Medio (1981). Los del Ciclo Superior aparecieron en Real Decreto 3087/1982, de 12 de noviembre, suspendiéndose antes de su implantación por el Real Decreto 607/1983, de 16 de marzo.

La presentación del entonces Director General de Enseñanza Primaria, Eugenio López, de estas directrices, se argumentó en la llamada de Naciones Unidas a potenciar la educación como la más importante de las vías de desarrollo. Esta idea venía marcada por una serie de hitos que jalonan la efectividad de la renovación educativa, tales como la preparación y las aptitudes del profesorado, y el ajuste de los programas a las distintas situaciones, entre otros. La orden (Vida Escolar 1970-1971: 5) establecía que...

> ... la puesta en marcha del nuevo sistema educativo, de forma realista y programada, necesita la experimentación previa a la total implantación

de las nuevas enseñanzas previstas en la Ley General de Educación, porque cierta mente, muchas de las innovaciones pedagógicas exigen una cuidadosa investigación, experimentación y evaluación de resultados.

En el tortuoso camino a recorrer se quedaron las esperanzas de que todo aconteciera de «forma realista y programada». Pronto se vino encima la «contrarreforma» de los Programas Renovados y sólo parcialmente, pues en el Ciclo Superior no duraron apenas un curso académico.

Consecuencia de la nueva implantación curricular fue el inmediato desdén que se hizo hacia la investigación y, claro está, a la experimentación. Del mismo modo, la evaluación de resultados brilló por su ausencia y hasta una década más tarde no se realizan valoraciones concretas sobre aspectos puntuales.

Las Orientaciones Pedagógicas estaban conformadas por cuatro grandes apartados: Objetivos y directrices metodológicas; Niveles y contenidos; Evaluación; Organización y temporalización del trabajo escolar.

No discutimos la relevancia de cada uno de ellos, pero la delimitación de nuestra temática sugiere nos detengamos en los dos primeros.

En la «Introducción» de las Orientaciones Pedagógicas (Vida Escolar 19701971: 11) se justifica el establecimiento de unos objetivos generales adecuados a la estructuración en grandes áreas de aprendizaje ele «expresión» y de «experiencia»-. Es interesante el siguiente inciso. Dentro de estas áreas se encuentran las Matemáticas, consideradas como una posible forma de expresión, de lenguaje (lenguaje matemático).

Mialaret se refiere a seis etapas en el proceso de adquisición del lenguaje matemático: la acción, la asociación de la palabra con la acción, conducta del relato, abstracción matemática, lenguaje gráfico y lenguaje simbólico. Es en la cuarta etapa, abstracción matemática, cuando el niño se halla capacitado

para explicar verbalmente una realidad resultado de la captación de circunstancias específicas. De esas explicaciones surgirá como emergente el lenguaje gráfico. La última etapa implica el conocer y saber usar los signos matemáticos específicos de cada tarea propuesta.

También en los Programas Renovados (MEC 1981: 57) se vuelve a incidir sobre este aspecto y presenta la Matemática como si se tratara de...

> ... un nuevo lenguaje que lleva tras de sí un nuevo modo de pensar.

CHEVALLARD (1980: 92) objeta radicalmente que...

> ... su enseñanza (la de las Matemáticas) tendrá, pues, por único y suficiente medio, una dicción impecable. Es el tema del rigor por fin realizado.

Más tarde David PIMM (1990: 19) pretende estructurar el concepto de Matemáticas en términos de lenguaje...

> ... pero con la intención de arrojar luz sobre la enseñanza y el aprendizaje de las mismas.

Este autor intenta disipar dudas con el triple planteamiento de la relación Matemática-Lenguaje apreciada como:

a)Matemática y Lenguaje;

b)el lenguaje de las Matemáticas;

c)la Matemática como lenguaje.

Este último, el de construir las Matemáticas en términos lingüísticos, puede tener acérrimos enemigos en los matemáticos cuya opinión es la de una actividad de la mente humana carente de lenguaje.

Concluye Pimm que las Matemáticas no son un lenguaje natural, pero que existen indicios, como su aspecto simbólico, que facilitan la interpretación de constituir un lenguaje.

Orton señala las dificultades de aprendizaje en el lenguaje como posibles causas de conflictos en el aprendizaje en general, y que este problema se acentúa, precisamente en Matemáticas, por el empleo de un vocabulario específico.

Las características del lenguaje matemático verbal las enfatiza RosAl.ES (1984: 155) desde aspectos relativos al vocabulario, a la expresión y a las implicaciones psicopedagógicas. Los textos de Matemáticas deben partir de expresiones naturales que el niño conozca, utilizando un vocabulario básico de términos generales, no específicamente matemáticos. Las consecuencias psicopedagógicas se derivan hacia el grado de concreción-abstracción de las cuestiones, ejercicios y problemas que el alumno se va a encontrar: su efecto positivo, o negativo, sobre la comprensión dependerá del nivel verbal escogido.

SKEMP (1980: 99) concede importancia a los símbolos en Matemáticas, tanto para su aprendizaje como para su uso. Menciona que un concepto puede rememorarse de dos formas: mediante el uso de un símbolo asociado o involuntariamente. Además, refiere cómo Bruner representa las Matemáticas como «un cálculo de pensamiento», causa de su sistema simbólico.

SÁNCHEZ ÁIUARE.z (1985) expone la opinión de diversos autores sobre la relación Lenguaje-Matemáticas. Una de las más destacadas es la de Harley, defensor de la importancia del uso de términos adecuados en la formación de conceptos matemáticos. Es fundamental elegir aquellas palabras más idóneas para expresar los conceptos.

Esta concepción de las Matemáticas trajo consigo no pocos problemas de interpretación. Hemos creído conveniente el comentario de este aspecto por

la importancia que algunos autores han concedido al tema. Es evidente que para nuestros planteamientos didácticos y psicopedagógicos esta dicotomía, de si es o no un lenguaje, es algo verdaderamente irrelevante.

2.2.1 Consecuencias de una implantación precipitada

De particularísima gravedad es que, como reconoció el propio Ministerio de Educación y Ciencia (1981: 9), desde 1971 la Dirección General de Educación Básica no estableciera nuevas orientaciones o programaciones en la enseñanza de las Matemáticas. Extraña los términos de esta denuncia ante la actitud de un organismo oficial subordinado a otro de mayor rango, porque éste, en un mo mento puntual pudo actuar en consecuencia, y no esperar diez años para «dar el tirón de orejas».

Sea como fuere, no pretendemos valorar posturas que nos conducirían a analizar aspectos de la transición política; lo que importa es que no ha existido una evaluación oficial de los programas que detectara las dificultades en la enseñanza.

La confirmación de frecuentes «fallos y lagunas en el aprendizaje de las Matemáticas», en ocasiones por mor de unos contenidos formalmente desajustados al proceso evolutivo de los alumnos, se argumenta bien desde la labor diaria de muchos docentes o desde investigaciones y evaluaciones realizadas con carácter privado. En este punto, creemos que el Ministerio de Educación y Ciencia comete un lapsus, pues en el curso 1984-1985 realizó una evaluación (MEC sin fecha: 103) sobre el Ciclo Medio. Asimismo, en 1984, la Dirección General publica un anteproyecto para reformar el Ciclo Superior donde se hablan de ciertos fallos, que más adelante expondremos. Antes, en los años 1976 y 1980, la revista Vida Escolar' apuntó algunas deficiencias en las Orientaciones Pedagógicas. Sin duda quien más rigor científico posee, de las cuatro reseñadas, es la evaluación del curso 1984-1985. De las otras - salvo la de 1976 - no podemos mantener su carácter de rigurosidad por desconocer qué fuentes sirven para demostrar lo que detectan

y apuntan como deficiencias y fallos. No obstante, son citas de fuentes solventes.

Estas deficiencias no son procesos aislados, todo lo contrario. Deben considerarse en un contexto mucho más amplio y es en el cual se desarrolló la Educación General Básica. De entre varias razones argumentadas, cabe destacar las siguientes por la relación con nuestro interés temático:

-La utilización de libros de consulta como libros de texto (para algunos profesores de forma dogmática).

-En el caso del profesorado de Matemáticas, una desigual formación que contribuyó a que la metodología empleada en el aula fuera demasiado heterodoxa.

Esta nueva Matemática «Moderna» supuso un esfuerzo de reactualización conceptual por la presencia de un lenguaje y unas ideas desconocidas, agravado por la ausencia de una fundamentación práctica. Se vislumbra un alejamiento de la aplicación práctica y de las propias motivaciones personales de los alumnos. De hecho pueden cuestionarse aspectos tales como:

-Ciertos contenidos tradicionales de la Escuela Primaria, como el cálculo y la geometría, se difuminaban ante la presencia de otros más sofisticados y de escasa trascendencia en la formación del alumno, como por ejemplo la Teoría de Conjuntos.

-Los desfases producidos en la programación y la escasa preparación psicopedagógica, que fomentan el rechazo de los alumnos hacia materias como las Matemáticas.

Acerca de la primera cuestión puntualizamos que el trasvase de cadenas de conocimiento, válidas desde una determinada concepción de la estructura interna de las Matemáticas, puede llegar a ser funesta para el aprendizaje de

las mismas, como ha puesto claramente de relieve el intento de fundamentar toda la Matemática en esta teoría.

Según las Orientaciones Pedagógicas (1970: 26), el área de las Matemáticas introduce procedimientos que posibilitan la creación de estructuras formales para utilizarlas en gran número de situaciones. La creación de estructuras se especifica en todos los objetivos de ambas etapas de la EGB. En cambio, el uso de estas estructuras en distintas situaciones sólo se menciona en uno de los objetivos de la segunda etapa: «elaboración de sencillos esquemas mentales que permitan al alumno resolver problemas de la vida ordinaria y profesional».

El análisis de los objetivos específicos del área de Matemáticas, para el conjunto de la EGB, depara una situación donde existe un sometimiento a los términos de «capacidad, adquisición (de automatismos, de vocabulario) y desarrollo (agilidad mental, intuición espacial)». Las Orientaciones Pedagógicas (Vida Escolar 1970-1971: 27) presentaban diez objetivos específicos del área de Matemáticas:

1.Desarrollo de la intuición espacial (...).

2.Capacidad de representación gráfica y construcción plástica.

3.Adquisición del vocabulario básico (...).

4.Logro de los mecanismos del cálculo operatorio elemental (...).

5.Adquisición de los automatismos de razonamiento lógico (...).

6.Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo.

7.Capacidad de crear estructuras formales.

8.Capacidad de plantear simbólicamente situaciones problemáticas.

9.Capacidad de interpretar funciones y tablas.

10.Capacidad de leer y expresar datos cuantitativos.

A continuación se dan sugerencias de posibles actividades, treinta y ocho objetivos, de los que sólo catorce (menos de la mitad), se definen como «conocimientos, vocabulario, abstracción o concepto». No hay presencia del dominio afectivo ni psicomotor (excepto el dibujo geométrico)... Recordamos cómo toda formulación de objetivos precisa el desarrollo de los tres dominios, cognoscitivo, afectivo y psicomotor.

En definitiva, la presentación de los contenidos matemáticos se convierte en una mera secuenciación de temas por cursos, al más puro estilo de la enseñanza tradicional, que para el área de las Matemáticas incidía sobremanera en los contenidos del número y la cantidad, las cuatro reglas y sus aplicaciones en medidas y pesos.

Aunque las Orientaciones Pedagógicas primero, y los Programas Renovados después, pretendían de las Matemáticas una nueva forma de expresión, no lo consiguen por la concepción que mantienen sobre esta área. El contenido matemático deja de primar sobre el resto y lo importante es la organización mental del alumno con respecto a su medio, la elaboración de conceptos como espacio, conjunto, número, etc. Resultan significativas las recomendaciones de las Orientaciones Pedagógicas (Vida Escolar 1970-1971: 26), en el sentido de pretender, durante la primera etapa de EGB (lo que más tarde se reestructuraría como Ciclos Inicial y Medio)...

> ... que los alumnos sean capaces de llegar a la expresión numérica mediante el ejercicio y empleo consciente de las relaciones entre conjuntos, la comprensión del número como una propiedad de aquéllos - la idea funcional de algunos conceptos topológicos y construcciones geométricas. El número es un símbolo y como tal una abstracción, resultado de un proceso que, partiendo de la observación, tiene a su vez

> una expresión verbal, y recorre un camino que exige ordenar datos informativos y crear estructuras formales que los resuman. El número expresa también una relación y es preciso que antes de llegar a su utilización, se haya practicado no sólo la observación, sino el análisis y la síntesis. Se corre pues un grave riesgo si se introduce al alumno en los mecanismos operatorios sin recorrer antes el camino aludido.

Asimismo, se aconseja evitar la memorización de conceptos, sobre todo en la enseñanza que tradicionalmente se ha hecho de las operaciones aritméticas. Sin el conocimiento previo de la numeración, y presentadas en forma aislada y poco coherente, el alumno no gozará de los procedimientos más adecuados que faciliten la creación de estructuras formales. Apuntan, como requisito para subsanar este error, transferir las operaciones entre conjuntos y la aplicación numérica subsiguiente antes de la enseñanza de las operaciones aritméticas.

Análisis de los Programas Renovados 2.3

La experiencia aportada tras la aplicación de las Orientaciones Pedagógicas a comienzos de la década de los setenta, el progreso científico, didáctico y pedagógico acontecido durante estos años, y las importantes transformaciones de índole política, social y económica, acaecidas en España, advertían un cambio necesario y aconsejaban una honda revisión de la ordenación del sistema educativo para adecuarlo a la nueva realidad de la época.

Desde esta visión se desarrollaba una nueva reforma que estructura el nivel de la Educación General Básica en tres ciclos: Ciclo Inicial (con dos cursos de escolarización), Ciclo Medio (tres cursos) y Ciclo Superior (tres cursos), superando - valga la redundancia - la división anterior de dos Etapas (primera y segunda). Al mismo tiempo se determinan unas «Enseñanzas Mínimas», que para el Ciclo Inicial habían sido ampliamente ensayadas y consultadas durante dos cursos escolares.

Con esta regulación se pretendía garantizar a todos los niños españoles, una base cultural homogénea ampliable de acuerdo con las peculiaridades de cada región, y diversificada mediante el ejercicio de las competencias conferidas a las nacionalidades por los estatutos autonómicos.

La estructuración de los Programas Renovados mantenía el espíritu de la Ley General de Educación, aunque proponía un desarrollo de los ocho cursos en tres grandes ciclos. Con dicho establecimiento por ciclos no se pretende la desaparición de los cursos, sino su integración en unidades temporales más amplias que den mayor unidad al proceso educativo, permitan una mejor adaptación de los procesos de enseñanza-aprendizaje al ritmo evolutivo de los escolares y una mayor flexibilidad en la organización escolar y en la promoción de los alumnos.

En teoría, los nuevos programas ofrecían una visión coherente de las diversas áreas de enseñanza a través de una estructura más armónica con las necesidades que, en general, una demanda educativa exije. Para ello se agrupaba la materia en Bloques Temáticos que relacionan entre sí Temas de Trabajo con la finalidad de conseguir una noción global y sistemática del área en cuestión. Estos temas tienen la particularidad de poseer un sentido específico e individual que los hace independientes en su abordaje, aunque se incardinan en un bloque de temas determinado.

Los Niveles Básicos de Referencia vienen a ser los objetivos que se han de alcanzar obligatoriamente en cada tema de trabajo. Pueden entenderse como un conjunto de conocimientos, actitudes, asimilación de valores, hábitos, destrezas y técnicas de trabajo que los alumnos deberán conseguir al terminar cada curso o ciclo. Se da una gran importancia al campo de la afectividad, al de las actividades sensoriales y motrices y, en general, a las más variadas manifestaciones de la conducta.

Por último, están las Actividades, conjunto de acciones y experiencias que se proponen como idóneas para conseguir cada uno de los objetivos

diseñados. Siempre deben llevar el carácter de sugeridas y no el de obligatorias, se presentarán graduadas de mayor a menor dificultad y elaboradas con criterios de innovación, creatividad, actividad, iniciativa y repetición habituadora en aquellos casos donde proceda.

Los Programas Renovados de los ochenta intentan superar la concepción de la década anterior recurriendo a la pedagogía por objetivos, propia de los modelos tecnológicos. Su paradigma instruccional es sistémico. Se limita a señalar unos objetivos, proponer unas actividades para conseguirlos y evaluar y promocionar en función de ellos. Mac Donald-Ross define el enfoque sistemático como...

> ... un intento de planificación racional en educación que se atribuye a sí mismo una amplia validez Puede aplicarse a cualquier nivel educativo y a cualquier materia.

Este fue el modelo teórico utilizado para seleccionar, organizar y/o secuenciar los contenidos a impartir. Era ineludible que las metodologías se enfocaran según las «nuevas» teorías matemáticas o pedagógicas, porque se actuaba en función de consideraciones propiamente matemáticas y de las aportaciones de la tecnología educativa. Y si algo no puede permitirse es la incorporación de ta xonomías y modelos de secuenciación de los contenidos que no probaron su validez en el campo específico de la educación matemática.

Del mismo modo, una crítica importante y en sentido similar se realiza a nuestro sistema de educación. Las renovaciones que se efectúan se hacen desde las aportaciones teóricas de los psicólogos y nunca desde la práctica diaria que supone el trabajo del profesorado. Por eso el fracaso al que se abocan proyectos poco recurrentes a estrategias de enseñanza basadas en los objetivos y contenidos educativos que se programan.

En el año 1980, la revista Vida Escolar publica el Documento base que

señala las deficiencias detectadas en las Orientaciones Pedagógicas de los años 1970 y 1971. Se habla de un carácter indicativo, no prescriptivo; de una fórmula muy rígida de promoción automática de los alumnos; etc

Para nuestro interés, dos son las deficiencias notables que deseamos destacar y que, no obstante, plantean unas ciertas ventajas en el desempeño de la función docente.

La formulación tan amplia, vaga y general que se realiza de objetivos y contenidos, plantea algunas dificultades en la interpretación de cuáles son los objetivos concretos de aprendizaje. De igual modo, resulta inextricable distinguir entre lo imprescindible y lo realmente deseable. La ventaja de esta situación la encontramos en la generalidad que promueve, una situación que abre considerablemente el campo de acción del docente y le permite desarrollar la metodología a su particular conveniencia.

La segunda de estas deficiencias es que los manuales escolares desbordan la temática por culpa del excesivo margen que la legislación permite. Esta situación se convierte en ventaja si el profesor consigue acabar el programa y, además, lo hace sin crear lagunas en el aprendizaje de los contenidos.

Esta indeterminación de las Orientaciones Pedagógicas estimulaba, sin duda, la iniciativa del profesorado comprometido. Era una ventaja... Y el profesorado no comprometido, ¿qué pasa con él? Este era, en cambio, uno de los peores lastres que podía soportar la reforma de 1970. El plan de estudios que se ofreció no estaba bien estructurado y no se editaban cuestionarios capaces de dar unidad a los contenidos y garantizar así unos mínimos necesarios e imprescindibles... Se prefirió ofrecer unos temas optativos que provocaron bastante confusión; a partir de este planteamiento, cada uno podía seguir el camino que estimase oportuno, sin garantizar la conexión entre los cursos, no ya pertenecientes a centros distintos, sino a veces en el mismo centro.

Ya comentábamos en el punto anterior cómo la estructura de los Programas Renovados partía de una nueva división de la EGB. Desaparecían las etapas que se convertían en ciclos, y a partir de aquí surgía una redistribución de los componentes básicos del sistema educativo: ocho niveles, con sus correspondientes áreas. Éstas presentaban los Bloques Temáticos, que se desarrollan en grupos de temas de trabajo interrelacionados que, a la postre, son contenidos con entidad propia. Los temas de trabajo contienen los Niveles Básicos de Referencia; éstos no se definen en términos operativos y se limitan a exponer una serie de actividades concretas. Cada área presenta breves orientaciones de tipo metodológico para cada ciclo y especifican una serie de objetivos.

Los Niveles Básicos de Referencia han de ser alcanzados obligatoriamente al final de cada curso, o de cada ciclo, y son un conjunto de contenidos, hábitos, actitudes, destrezas, habilidades, técnicas de trabajo y estudio, esquemas y procesos, formas de pensar y actuar, y valores que los alumnos pueden, (porque son básicos desde el punto de vista instrumental, científico y conductual) adquirir o cultivar en cada uno de los bloques temáticos. Constituyen la parte fundamental de los Programas Renovados y se fijan por ciclos con carácter obligatorio.

LÓPEZ DEI, CASTILLO (1982: 16) se refiere a los programas como niveles que señalan hasta dónde llega el rendimiento en el marco educativo. Son básicos en cuanto al tipo de adquisición que debe alcanzarse, y de referencia por denotar una guía y orientación para cualquier actividad a desarrollar en el aula.

Hasta fijar las «Enseñanzas Mínimas» del Ciclo Medio (Real Decreto 710/1982), las editoriales disfrutaron de cierta «patente de corso» en la elaboración de los libros de texto. Resultó largo el período desde la implantación de la Reforma en el año 1971 hasta su regulación en 1982. El artículo noveno del decreto (Vida Escolar 1982: 5) reza que...

> ... los libros y material didáctico de Ciclo Medio deberán atenerse a las enseñanzas mínimas establecidas en el presente Real Decreto...

aunque durante el curso 1982-1983, y como disposición transitoria, se pudieron utilizar los libros y material didáctico que hasta la fecha estaban autorizados.

Estas son algunas preguntas que surgen:

-¿Puede una administración educativa permitir el transcurso de una década desde el inicio del primer curso académico hasta la aprobación definitiva por el Ministerio de Educación de las «Enseñanzas Mínimas»?

-¿Con qué criterios funcionaron las editoriales durante ese período de tiempo?

-¿Por qué se adoptó un sistema - el de fichas - probado en otros países con resultados negativos y que a la postre resultó un auténtico fracaso?

Podríamos plantear más preguntas... De todas formas otros autores ya han indagado sobre cuestiones parecidas y sus resultados han preñado de serias dudas aquella reforma emprendida a remolque de las que en otros países se iniciaron algunos años antes (Estados Unidos, Francia, Bélgica...).

Los Programas Renovados, aparecidos a comienzos de la década de los ochenta (Vida Escolar 1982: 114), introducen los «Niveles Básicos de Referencia» de las Matemáticas del Ciclo Medio, y especifican que la enseñanza de esta materia curricular se...

> ... dirigirá a la organización de las estructuras mentales, a la construcción de conceptos básicos y a la adquisición de unos automatismos operativos.

Es conveniente acotar estos conceptos tan importantes y justificar el porqué

de esta incidencia, según la filosofía que guió los Programas Renovados, y la crítica que se puede justificar desde la reforma LOGSE.

Organizar las estructuras mentales es una pretensión fundamentada en las características del período que va desde los siete a los nueve años. Esta organización depende de los estadios evolutivos y no puede fijarse en el año natural, ni siquiera en el período que supone el curso. De ahí la justificación de ciclo como lapso de tiempo más idóneo.

En cuanto al desarrollo intelectual se refiere, destacar que desde un comienzo el pensamiento se convierte en más analítico, dotado de una progresiva capacidad crítica. Uno de los principios donde se basa el conocimiento, la denominada «ley de contradicción», se implanta en el pensamiento infantil. Comienza a inhibirse el juicio intuitivo que se reemplaza por el razonamiento y se alcanza la lógica, la cual permitirá una mayor coherencia intelectual.

Coincidiendo con el final del Ciclo, el alumno destaca, sobre todo, en el desarrollo de las funciones intelectuales. Las Matemáticas, y las tareas con ellas relacionadas, suscitan un vivo interés, siempre que el docente utilice una metodología facilitadora de su comprensión y asimilación.

Es lógico que esta organización de las estructuras mentales se considere un excelente momento para la construcción de conceptos básicos. El alumno es excesivamente realista y racionalista. La imaginación sufrirá un receso; ahora, todo lo que llega pasará por el tamiz de la comprobación.

Construir el conocimiento matemático en esta etapa se facilita por esta característica de racionalidad que impera en el alumno. Debe primarse el carácter intuitivo sobre el deductivo por resultar el mejor aliado para esa construcción. Esto no implica una interpretación de la enseñanza de las Matemáticas con un valor exclusivamente preparatorio, es decir, de introducción de conceptos y procedimientos básicos que han de ser

posteriormente objeto de ampliación y profundización.

Toda esta crítica institucional plantea serias dudas y bastantes incógnitas acerca de la credibilidad de los Programas Renovados; más aún cuando se lanzan razones argumentadas (MEC 1989a: 388), como que...

> ... desde un inicio mismo de la Educación Primaria (10 y 2° de Ciclo Inicial), el aprendizaje de contenidos matemáticos ha de vincularse el (sic) desarrollo y utilización de nuevos instrumentos y recursos de exploración, comprensión y actuación. De ahí la importancia que se concede en el Diseño Curricular Base al dominio funcional de determinados contenidos (algoritmos de cálculo, estrategias de conteo, estrategias básicas de cálculo mental, utilización de la calculadora, estimaciones de resultados, estimaciones de medidas, etc.) a los que no siempre se ha prestado la atención que merecen.

Cuando en 1984 la Dirección General de Educación Básica publica el Anteproyecto para la Reforma del Ciclo Superior, anticipa fallos detectados y que son extensibles a los restantes ciclos. Uno de los epígrafes se refiere a las deficiencias más significativas de los Programas Renovados:

-Excesivos objetivos mínimos como efecto de la meticulosidad de concretar hasta el límite el aprendizaje de los alumnos.

-Los Niveles Básicos de Referencia se desconectan de la realidad del alumno por no considerar, en su planificación general, las dificultades pedagógicas que supone atender una estructura sociológica tan variada.

-La jerarquización de los objetivos es imprecisa debido, en primer lugar, a la gran profusión de los mismos; en segundo lugar, a su carácter obligatorio y concretísimo. Por último, la adecuación de los Niveles a las capacidades de los alumnos no es preceptivo realizarla en el mismo grado.

-No existe integración entre contenidos y metodología (priman los contenidos sobre las técnicas en la práctica escolar). Las causas están en la escasa asimilación de los docentes de las pretensiones reformistas, la implantación precipitada de los modelos de la reforma y de un marco de perfeccionamiento para el profesorado poco accesible.

La evaluación de los Programas Renovados (MEC sin fecha: 103) en el Ciclo Medio se realizó al comenzar el año académico 1984-1985 con una muestra de 8.000 alumnos de 5° de EGB de toda España. El Ministerio, que esperó transcurriera un período completo desde su implantación, pretendía averiguar en qué grado conseguían los alumnos superar las «Enseñanzas Mínimas» propuestas a la finalización del ciclo. Es evidente que nuestra intención no es valorar todos y cada uno de los aspectos de este informe; basta con detenerse en el área de las Matemáticas. En la siguiente tabla se ofrecen los porcentajes de objetivos superados a la finalización del Ciclo Medio y los alumnos - también expresados en porcentajes - que consiguen superarlos. La evaluación se realizó sobre diez objetivos.

PORCENTAJES DE OBJETIVOS SUPERADOS EN MATEMÁTICAS Y ALUMNOS QUE LOS DOMINAN AL FINALIZAR EL CICLO MEDIO

% de Objetivos superados	75	75-50	50
% de Alumnos que los superan	24,9	36,6	38,4

El porcentaje mayor de alumnos se concentra en el bloque de menor porcentaje de objetivos superados. Es muy elocuente que el 75% de los objetivos evaluados lo alcance el 24,9% de los alumnos. Pormenorizando el análisis de algunos de los objetivos estudiados en Matemáticas, la situación reflejada es preocupante. Los tantos por ciento de alumnos que no superan estos objetivos al terminar 5° de EGB se pueden consultar en la tabla siguiente:

PORCENTAJES DE ALUMNOS QUE NO SUPERAN OBJETIVOS EN MATEMÁTICAS

OBJETIVO	%
Leer y escribir números naturales	17,4
Multiplicar números naturales	37,4
Leer y escribir números decimales	37,1
Dividir números naturales	29,0
Calcular y resolver problemas	49,2

Queda demostrado, a la luz de estos porcentajes:

-La inadecuada realidad de los programas, que no acompañan al desarrollo de los alumnos de 6 a 11 años.

-La escasa concreción de los objetivos, por su formulación ambigua.

-La falta de aprendizaje real, confiriendo más importancia a la mecanicidad.

-El escaso desarrollo de las capacidades básicas.

-La desatención a un tema capital en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas como es la resolución de problemas.

Salvador PÉREZ (1990: 51) reflexiona a la luz de estas investigaciones y aduce ciertas causas que inciden en el fracaso de los Programas Renovados en su intento de mejorar el rendimiento escolar. Dentro de los aspectos más criticados aparece la gran dependencia que posee el docente, en términos generales, a los libros de texto.

La incidencia en la práctica docente 2.3.1

Se han comentado las valoraciones que distintas evaluaciones - oficiales y oficiosas - realizaron sobre los Programas Renovados. Expusimos los defectos más destacados que la Dirección General de Educación Básica detectó al realizar el anteproyecto para la reforma del Ciclo Superior en el año 1984. Ese mismo curso, otra evaluación efectuada sobre alumnos que finalizaban 5° de EGB deparaba resultados poco alentadores.

El profesorado, al igual que ocurrió unos años atrás con la implantación de la Educación General Básica, se vio inmerso en una desorientación consecuencia de urgentes modificaciones y replanteamientos programáticos. Bien es cierto que un factor positivo para estos docentes fue el acontecimiento de estar incluidos dentro de un plan experimental, con la carga de motivación añadida que esto supone.

¿No fue la sensación vivida en los momentos previos a la reforma LOGSE? Salvando las distancias y el tiempo transcurrido, bien es cierto que muchos profesores se mostraron escépticos, porque conocieron lo ocurrido entonces y otro tanto de lo mismo vaticinaban para ese momento de cambio.

¿Qué falla? Es dificil apostar por unas causas determinadas. Obviamente entramos en el campo de las conjeturas, terreno abonado a riesgos poco rigurosos. No obstante, creemos encontrar un motivo de este proceder en las evaluaciones antes mencionadas. Pensamos que la información brindada por los Programas Renovados fue la principal causa de la desorientación docente y que se tradujo en una práctica educativa no convencional (en el sentido de no seguir las pautas y directrices que la programación vigente aconsejaba).

No es nuestra inclinación extendernos en disquisiciones metodológicas y didácticas, pero baste como muestra estudiar con cierto detenimiento el Documento de Consulta que la Revista de la Dirección General de Educación Básica -Vida Escolar - publicó acerca de los Programas Renovados para la

EGB, área de Matemáticas. La Introducción General del número 210 de enero-febrero de 1981 (página 2) recoge los «Niveles Básicos de Referencia». En realidad se trata de una presentación muy sucinta, demasiado breve, de las modificaciones realizadas por distintos grupos de trabajo en la renovación de los programas anteriores (Orientaciones Pedagógicas). En tres páginas se efectúa la explicación de estos cambios, distinguiendo dos aspectos. De una parte, la estructura de los programas, considerada...

> ... respecto a las Orientaciones Pedagógicas de 1971 más concretas, amplias y desarrolladas.

De otra, el nivel de profundización donde a través del desglose de objetivos se indica el límite en extensión y el grado de desarrollo de cada bloque temático.

La estructura se desarrolla en cuatro bloques temáticos que comprenden varios temas. En ellos se recogen:

a) Los contenidos a impartir en el Ciclo y que se integran en cuatro Bloques Temáticos, para el caso del Ciclo Medio.

b) Los objetivos, considerados de nivel mínimo.

c) Las actividades, calificadas de modélicas, otorgan un nivel de profundización en el objetivo señalado.

d) Las introducciones, que incardinadas como elemento de apoyo y orientación al profesorado, aparecen al principio de cada uno de los Bloques Temáticos y de cada tema.

Acerca de los objetivos es interesante recoger la indicación que en este número 210 de Vida Escolar aparece. Dice textualmente:

> Los objetivos a alcanzar dentro del ciclo (ya que no se especifican para

> cada curso)...

En cambio, esta misma revista en su número 216-217 de marzo-junio de 1982 presenta un monográfico titulado «Programas Renovados del Ciclo Medio». En él se ofrece una presentación donde literalmente se escribe:

> Pero a diferencia del Ciclo Inicial, los objetivos se presentan distribuidos por cursos, con carácter indicativo.

Discrepamos de esta tendencia oficialista nada rigurosa de presentar las cuestiones conforme al escribiente de turno: o es de una forma o es de otra.

Pero no acaba aquí la cosa. Es curioso comprobar la multiplicidad de objetivos; basta fijarnos en la página 4 de Vida Escolar (1982), apartado «Legislación» donde se incluye un anexo con todas las áreas, sus correspondientes Bloques Temáticos y los objetivos de cada uno de éstos. Para las Matemáticas concretamente se establecen veintiséis objetivos. Unas páginas después, los Niveles Básicos de Referencia se desarrollan por áreas y se comprueba cómo cada curso no sigue tal número de objetivos y que cuando, lo más lógico, sería moverse en torno a ese número, se disparan. Así en 3° de EGB, cincuenta objetivos; en 4° de EGB, cuarenta y uno; y en 5° de EGB, cuarenta y siete.

Este es el desglose para el área de Matemáticas por «Bloques Temáticos»:

DESFASE DE OBJETIVOS ENTRE EL ÁREA DE MATEMÁTICAS, EN GENERAL, Y CADA CURSO, EN PARTICULAR, DEL CICLO MEDIO DE EGB

BLOQUE TEMÁTICO	MATEMÁTICAS	3º EGB	4º EGB	5º EGB
1	6	10	6	7
2	7	12	16	14
3	4	12	8	11
4	9	16	11	15
TOTAL	26	50	41	47

Por otra parte, no confiamos excesivamente en la calificación dada a los objetivos...

> ... considerados de nivel mínimo, lo cual permite espacios y tiempos para actividades nuevas, más abiertas y flexibles, que permitan desarrollar capacidades de los mejor dotados - recuperar las de los que no han llegado al nivel mínimo.

Disentimos de esta intención que, a pesar de ser buena, es de dificil cumplimiento por el trabajo que le supone al profesor si la ratio no se ajusta a lo establecido por ley, como ocurría casi siempre en los cursos de la EGB.

2.3.2 ¿Cumplió el libro de texto el programa oficial?

El Real Decreto 710/1982, de 12 de febrero, por el que se fijan las «Enseñanzas Mínimas» para el Ciclo Medio de Educación General Básica, establece en el área de las Matemáticas cuatro grandes Bloques Temáticos con sus correspondientes objetivos.

DISTRIBUCIÓN DE LOS «BLOQUES TEMÁTICOS» EN MATEMÁTICAS

BLOQUES TEMÁTICOS	1. Conjuntos y Relaciones
	2. Conjuntos Numéricos
	3. Medidas
	4. Topología y Geometría

Referente a contenidos se pretende en este ciclo:

-la automatización de las operaciones con números naturales;

-la agilidad en el cálculo;

-el estudio del sistema métrico y sus aplicaciones;

-el estudio de los elementos geométricos del plano y sus relaciones entre ellos (de forma intuitiva y descriptiva);

-el reconocimiento y descripción de los cuerpos geométricos.

Por otra parte se insiste en que los alumnos hagan: traslaciones de unos lenguajes a otros (manipulativo, gráfico, oral), resoluciones de problemas y uso correcto y preciso del vocabulario correspondiente.

Una de las características más llamativas de este ciclo es cómo algunos objetivos se repetían literalmente en los tres cursos, presentando así su estudio de forma cíclica para profundizar y completar particularmente algunos aspectos de forma gradual.

Los Bloques Temáticos que integraban este período académico de la Educación General Básica se diseñaban para que el alumno consiguiera:

-La automatización de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación

y división con números naturales y la agilidad en el cálculo.

-Intensificar el estudio del Sistema Métrico y sus aplicaciones, así como adquirir una idea aproximada de la extensión de las distintas unidades de medida.

Fomentar la creatividad, imaginación y visión espacial con la introducción a la Topología y a la Geometría.

Cuando un sistema educativo se reforma, implícitamente conlleva una serie de transformaciones curriculares y de organización inherentes al proceso de cambio. Dentro de las primeras se hallan las renovaciones, que se promueven en las distintas materias de los programas oficiales, y cuyas consecuencias más inmediatas son la reformulación de objetivos educativos, supresión de contenidos e inclusión de otros nuevos.

Es obvio que todo sistema educativo evoluciona mediante variaciones y modificaciones como lo haría una estructura, entendida ésta según la definición de FERRATER MoRA (1977: 1.042) como un...

> ... conjunto o grupo de elementos relacionados entre sí según ciertas reglas, o algún conjunto o grupo de elementos funcionalmente relacionados. El conjunto o grupo es un todo y no una mera suma.

Por tanto, en el cambio no sólo varía una concepción o una filosofía de la educación; se desprende una evolución más concreta que se produce con los avances de la ciencia, en general, y con las adaptaciones curriculares de cada materia, en particular.

Ciñéndonos a nuestro campo de acción - área de las Matemáticas - y delimitando con precisión un determinado aspecto del currículo - bloques de contenido-, la siguiente comparativa sobre la organización de los contenidos desarrollados «antes» (Educación General Básica) y «ahora» (Educación

Primaria) demuestra cierta transformación que, sin duda alguna, caracteriza ambos períodos.

EGB ORIENTACIONES PEDAGÓGICAS 1970	EGB PROGRAMAS RENOVADOS 1980	EP DISEÑO CURRICULAR BASE 1990
Conjuntos	Conjuntos y relaciones	Números y operaciones
Numeración	Conjuntos numéricos	La medida
Operaciones	Magnitudes y medidas	Formas geométricas y situación en el espacio
Medida	Topología y geometría	Organización de la información
Geometría y Topología		

Además, hay una serie de indicaciones sobre cómo abordar algunos contenidos específicos de las Matemáticas, como son el cálculo mental, el lenguaje matemático, la estimación, la resolución de problemas, la geometría, el azar y la probabilidad y el uso de la calculadora; unos por su relevancia y otros porque antes no aparecían, conllevan una diáfana ambición en la forma de enseñar y aprender Matemáticas.

Es obvio que de un sistema a otro las Matemáticas han cambiado, entendiendo que los tramos de edad siguen siendo relativamente los mismos (salvo el 7° y 8° de la EGB, ahora 1(1 y 2° de la ESO, respectivamente). En esta nueva concepción de las Matemáticas hay ciertas singularidades que los epígrafes de los contenidos descubren a simple vista. Un análisis más exhaustivo daría pistas sobre ellas.

Esta es la relación temática ofrecida por los Programas Renovados en los tres cursos del Ciclo Medio de la EGB:

30 EGB

BLOQUE TEMÁTICO/TEMA

1.CONJUNTOS Y RELACIONES

1.1.Conjuntos

1.2.Relaciones

2.CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1.Números naturales

2.2.Operaciones con números naturales

3.MEDIDAS

3.1. Sistema Métrico Decimal, medidas de longitud, capacidad y masa

3.2.Medida de tiempo y dinero

4.TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

4.1. Elementos y figuras planas y curvas del plano

4.2.Geometría en el espacio

40 EGB

BLOQUE TEMÁTICO/TEMA

1.CONJUNTOS Y RELACIONES

1.1.Conjuntos

1.2.Relaciones

2.CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1.Números naturales

2.2.Operaciones con números naturales

2.3.Fracciones y decimales

3.MEDIDAS

3.1.Sistema Métrico Decimal, medidas de longitud, capacidad y masa

3.2.Medida de tiempo y dinero

4.TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

4.1.Elementos y figuras del plano

4.2.Igualdad en el plano

4.3.Medidas de figuras planas

4.4.Geometría en el espacio

5° EGB

BLOQUE TEMÁTICO/TEMA

1.CONJUNTOS Y RELACIONES

1.1. Conjuntos

1.2. Relaciones

2.CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1. Números naturales

2.2. Operaciones con números naturales

2.3. Fracciones y decimales

3.MEDIDAS

3.1. Sistema Métrico Decimal, medidas de longitud, capacidad y masa

3.2. Medida de tiempo y dinero

3.3. Medidas de superficie

4.TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

4.1. Elementos y figuras en la geometría del plano

4.2. Igualdad en el plano

4.3. Medida de figuras planas

4.4. Geometría en el espacio

Según se desprende de este listado, los libros de texto de Matemáticas deberían ofrecer, según el curso, el siguiente número de temas: 3° EGB, ocho temas; 411 EGB, once; 5° EGB, doce.

Detectamos cómo las editoriales, movidas por un extraño criterio de la multiplicidad, disponen en sus textos temas que superan con creces el número arriba indicado para cada curso, según las prescripciones de los Programas Renovados.

En el cuadro n° 1 de los ANEXOS (véase punto 7.3 Datos de interés para el estudio) mostramos la inflación de temas de cada libro de texto de la muestra con respecto al cuestionario oficial. La comparación de cifras es harto elocuente y la primera reflexión a tal disparate es la pregunta: ¿Qué problemática confiere al proceso de instrucción tal hecho?

Retomando las palabras de Baltasar Gracián, «lo bueno, si breve, dos veces bueno», no cabe la menor duda de que, tanto metodológica como didácticamente, apostamos por la brevedad. Es obvio que si el número de temas crece, también lo hace el de actividades. Esta situación genera otra, a veces conflictiva, acerca de la actuación del docente ante la realización de actividades que puede crear controversias: ¿Todas las actividades? 0... ¿sólo algunas actividades?; pero, en este último caso, ¿cuáles? Parece inexcusable, pues, inclinarse por un criterio de simplicidad como el mostrado en la relación temática de los Programas Renovados.

En los tres cuadros siguientes de los ANEXOS se evidencia, por cursos y editoriales, cómo la mayoría de los temas correspondientes a los Bloques Temáticos de los Programas Renovados se multiplican, siendo muy pocos los que de saparecen. El único criterio que se nos antoja válido para justificar tales presencias y/o ausencias es, para el primer caso, la importancia concedida a ciertos contenidos, como las «Operaciones con números naturales»; para el segundo caso, la defenestración realizada a la «Teoría de Conjuntos».

El desdoblamiento que las editoriales realizan de los ocho temas de los Programas Renovados en 3° de EGB es el contenido del cuadro n° 2 de los ANEXOS. La mayoría de la editoriales coinciden en destacar el tema 2.2 «Operaciones con números naturales»; o así, al menos, se desprende de la cantidad de temas (la tercera parte del libro; en algunos casos, más) que cada una de ellas dedica a este contenido; hay una excepción en una editorial: sólo dedica la quinta parte.

Destaca, por un lado, la anticipación con la que una de las editoriales suprime la «Teoría de Conjuntos». Es obvio que se adelantan a los acontecimientos que impondrá el nuevo sistema educativo sobre este contenido curricular. Nos preguntamos si a costa de ir en contra de la ley que autorizó tal libro en su momento.

De otra parte, otra editorial sacrifica los temas del Bloque Temático «Topología y Geometría» a costa de introducirlos en los cursos siguientes y se vuelca, a nuestro entender en demasía, con la «Teoría de Conjuntos».

En 4° de EGB se sigue evidenciando la importancia que tiene a estas edades el cálculo y sus algoritmos. Pero el contenido «estrella» será el tema 4.1 «Elementos y figuras del plano». Todas las editoriales, excepto una, superan el número de temas dedicado a este contenido con respecto al de las «Operaciones con números naturales».

Acerca de la «Teoría de Conjuntos» se hace palpable cómo la editorial que se desentendió de ella en el curso anterior vuelve a ignorarla. Otras dos la tratan tímidamente destinando un único tema. Y la que concedió relativa importancia a este contenido, de nuevo dispensa trato análogo.

Los temas 4.3 y 4.4 de los Programas Renovados, «Medidas de figuras planas» y «Geometría en el espacio» respectivamente, se presentan de forma distinta según las editoriales. En tanto una de ellas realiza una propuesta de dos temas para tratar indistintamente ambos, otras dos editoriales programan un tema donde desarrolla los dos.

Con respecto al curso anterior, la propuesta oficial incrementa el número de temas en tres (de ocho en 3° de EGB a once en 41) de EGB). En cambio, las editoriales no necesariamente actúan así y, excepto dos, todas mantienen igual número de temas que los ofertados en 3° de EGB.

Otra de las notas que llama la atención es el tratamiento del tema 2.3

«Fracciones y decimales». Una de las editoriales se desmarca de la línea que, más o menos, siguen las demás para sólo dedicar un tema.

Por último la anécdota de la editorial que no trata el tema 3.2 «Tiempo y dinero» en este curso, pero sí lo hace en los otros dos.

En el último curso del Ciclo Medio de la EGB la tónica es la misma.

Por otra parte, la organización de los contenidos no se ajusta a la secuencia que los Bloques Temáticos de los Programas Renovados presenta. Baste com probar el «itinerario temático» localizado en el índice de cada uno de los dieciocho libros de la muestra (cuadro n° 5 de los ANEXOS).

El análisis de estos itinerarios, por una parte de las editoriales entre sí y, por otra, respecto al temario oficial, confirmará la disparidad existente.

Es preciso definir los términos de «concordante», «no concordante», «completa» e «incompleta» para entender la idea que apuntamos sobre la secuencia temática de los libros de texto.

«Concordante». Es aquella secuencia temática que coincide plenamente en su desarrollo con los temas propuestos en los Bloques Temáticos de los Programas Renovados.

«No concordante». Secuencia temática donde los temas planteados no son concomitantes con los diseñados en los Bloques Temáticos de los Programas Renovados.

«Completa». Secuencia temática donde están todos los temas sugeridos en la propuesta oficial.

«Incompleta». Secuencia temática donde faltan temas de los proyectados en los Programas Renovados.

Desde esta consideración terminológica se ofrece, en el cuadro n° 6 de los ANEXOS, resumen de la situación en la que se halla cada editorial. El desglose, realizado por cursos, es bastante representativo de la disparidad de criterios en el diseño de los textos; éstos deberían mantener unas directrices en la programación de sus contenidos a través del Ciclo y, sin embargo, sólo dos libros de texto cumplirían satisfactoriamente con la condición indispensable de secuencia temática concordante completa. Desde luego exigua representación de los dieciocho que conforman la muestra de la investigación.

La tónica de las editoriales se decanta hacia una composición de los libros de texto de Matemáticas inadecuada y que se resume en las dos características más sobresalientes extraídas de este análisis de la secuencia temática:

1°. Falta de concordancia con el temario oficial.

2°. Ausencia de temas.

La conclusión general se reduce a una simple idea, y es que la secuencia temática de los Programas Renovados no es seguida, de forma bastante generalizada, por los libros de texto de Matemáticas del Ciclo Medio de la EGB de las editoriales tratadas y, consideración aún más grave, la ordenación de los temas en algunos casos atiende a criterios difíciles de comprender.

Capítulo **3**

Proceso didáctico en la enseñanza/ aprendizaje de las Matemáticas

Este proceso didáctico de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas, según Piaget y Gattegno, ofrece resultados positivos si entre el alumno y su entorno suceden una serie de intercambios originales provocados por dos procesos: «asimilación» y «acomodación».

❑ Asimilación

En la «asimilación» se suceden las siguientes etapas o fases:

•Presentación expositiva. De modelos y ejemplos.

•Descodificación e interpretación. De partes concretas y secuenciadas, de las que se infiere un contenido significativo de la experiencia real del alumno.

•Precodificación y contigüidad. Para conseguir la adecuación y posterior utilización de símbolos y expresiones del lenguaje matemático. Después hay que buscar la contigüidad espacio-temporal, de forma que las acciones anteriores se organicen jerárquicamente para preparar la etapa siguiente.

•Elaboración-codificación. Con el fin de ejecutar y construir de manera manual, gráfica, informal y formal, el desarrollo de todo tipo de actividades realizadas (conceptos, problemas, ejercicios, etc.), según la estructura operativa del alumno al que se dirige la explicación expositiva.

❑ Acomodación

En el último estadio del proceso de «asimilación», el alumno se halla en una de estas dos situaciones: Primera, que la comprensión es continua y por tanto no ofrece dificultad. Segunda, la comprensión es discontinua y el aprendizaje resultante es mecánico; el alumno se verá abocado al uso de la memoria repetitiva.

Las etapas de la «acomodación» son:

•Ejecución. Operatividad (creación de automatismos) de la asimilación en otros ejercicios, problemas, etc.

•Generalización. Todo lo experimentado se formaliza mediante abstracción en leyes generales, conceptos o principios extensibles a otras condiciones de aprendizaje. La abstracción ha de ser entendida como un cambio producido en nuestra mente y con consistencia en cuanto a su duración (SKF.MP 1980: 26).

•Memorización y asociación. De ideas que brindan nuevas relaciones hacia logros más complejos.

•Aplicación. El alumno se encuentra en disposición de resolver otro tipo de situaciones mediante la aplicación de estrategias conocidas.

La cuestión radica en aceptar que, cada uno, aporta su peculiar forma de interpretar el nuevo conocimiento independientemente de cómo nos fuera enseñado. En esta situación han intervenido las modernas corrientes constructivistas indicando que, quien aprende, lo hace construyendo su propio conocimiento.

COCKCROFT (1985: 88) analiza los elementos que, a su juicio, deben presentarse en una enseñanza acertada de las Matemáticas a alumnos de todas las edades. Dicha enseñanza debe incluir:

-exposición por parte del profesor;

-discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos;

-trabajo práctico apropiado;

-consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas;

-resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las Matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana;

-realización de trabajos de investigación.

Pretender que la enseñanza resulte acertada, no sólo supone establecer con éxito los elementos antes citados; el alumno que aprende ha de procesar sistemas de datos matemáticos ya existentes. A nuestro entender, en el mejor de los supuestos, esta situación le hará depender de su profesor; en el peor de los casos, se corre el riesgo de adquirir cierta aversión y aborrecimiento a las Matemáticas. Por eso, se han de considerar los siguientes principios del aprendizaje de las Matemáticas:

1°) «Los conceptos de orden superior a aquellos ya poseídos, no deben enseñarse según una definición. Deben "atacarse" mediante una colección adecuada de ejemplos.»

Formalizar estos ejemplos supone, en primer lugar, partir de propiedades en común, y no otras, que conducen al concepto; en segundo, poseer con suficiente nitidez y claridad el concepto que ha de ser enseñado.

2°) «Como en Matemáticas estos ejemplos son a la postre otros conceptos, debemos asegurarnos que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende.»

Antes de intentar enseñar un nuevo concepto, es imprescindible conocer

cuáles son sus conceptos adyacentes y, para cada uno de ellos, descubrir los contributorios; y así secuencialmente hasta los conceptos primarios. Esta concatenación conceptual provoca que, si en la construcción de la estructura de abstracciones sucesivas, un nivel dado no se comprende - o se comprende mal-, cualquier avance hacia conceptos derivados se encuentra en peligro. Esto sucede con el álgebra si antes no se ha comprendido aritmética, pues gran parte del álgebra aprendido en la escuela es aritmética generalizada (SKEMP 1980: 38). Es importante, en cada etapa de abstracción, acceder a los conceptos contributorios cuando se necesitan. No basta con saber que están ahí.

Se ha mencionado en varias ocasiones el Informe Cockcroft y es oportuno valorar positivamente tan importante investigación - sobre la enseñanza de las Matemáticas - desarrollada en Inglaterra y País de Gales. En el punto que nos concierne, es interesante referir sus recomendaciones sobre las consecuencias que deben extraer los profesores para conseguir que su enseñanza se realice de la forma más adecuada. Por eso destaca (COCKCROFT 1985: 5) la necesidad de...

> .. posibilitar que cada alumno desarrolle, dentro de sus capacidades, la comprensión y destrezas matemáticas exigidas para la vida adulta, para el trabajo y para posteriores estudios y aprendizajes, teniendo siempre presente las dificultades que algunos alumnos experimentarán para lograr una comprensión apropiada.

Para paliar esas dificultades y ampliar convenientemente las habilidades cognitivas del alumno, se recomienda que el trabajo práctico sea primordial en el desarrollo de las Matemáticas en su estadio primario.

Romberg y Carpenter mencionan algunas variables relevantes en la enseñanza de las Matemáticas que potencian y mejoran el rendimiento de los alumnos.

La primera de ellas - variabilidad de contenidos propuestos en los textos, metodologías empleadas por los profesores y tiempo invertido en enseñar ciertos contenidos - puede redundar en rendimientos más óptimos, lo que avala una mejora de la instrucción.

Uno de los elementos anteriores da nombre a la segunda variable, denominada tiempo dedicado a la enseñanza. Cada contenido requiere un tiempo determinado y la actividad del alumno para la realización de tareas, otro. La obtención de resultados satisfactorios también está en función de una buena optimización del tiempo.

La tercera variable, secuencias de potenciación o desarrollo de las lecciones, persigue incrementar la comprensión de destrezas, conceptos y otros factores curriculares de las Matemáticas mediante una pauta reiterativa sobre aspectos importantes de los contenidos.

La instrucción en grupos reducidos es la variable que favorece el aprendizaje cooperativo y elimina cualquier supuesto de competitividad. La realización de tare as donde se busque ayuda y apoyo a los alumnos intelectualmente peor dotados, satisface por igual a éstos como a los compañeros que brindan su colaboración.

La quinta variable son las estrategias de enseñanza, inmersas en la adecuación del binomio características de los alumnos-contenido a enseñar.

Diferencias individuales es la sexta variable y pretende ajustar las Matemáticas al alumno que las aborda.

3.1 Nivel de concreción de las ideas en los textos escolares actuales

3.1.1 Inserción en los intereses del alumno

La conexión del texto con las experiencias e intereses del alumno resulta uno de los primeros recursos motivadores (RosAl.Fs LóPFz 1983: 195). Además,

si un texto «parte de experiencias concretas asequibles al alumno y de ejemplos de la vida real», refuerza la adaptación general correspondiente a las características del período madurativo que atraviesa el alumno. Otro elemento positivo es la contextualización de los contenidos en experiencias próximas al alumno; nada mejor para alcanzar tal beneficio que el empleo de ejemplos tomados de la vida real durante el desarrollo del tema, donde se implique al alumno, de forma muy directa, en el aprendizaje por encontrarse familiarizado con estas situaciones.

Excelente forma de introducir al alumno, para que «aterrice» en el tema, es la inserción de preguntas al comienzo de la lección. Diversos autores apuestan por esta modalidad, entre ellos ESCUDERO (1979), que las considera como un recurso con una clara intención de activar procesos propios de manipulación e inferencia a partir de la información que se dispone o se administra.

ROTHKOPF (1965) tras su investigación sobre los efectos de las preguntas insertas en el texto para conocer los impactos en el recuerdo y comprensión del contenido, concluyó que el aprendizaje y la retención del texto son superiores si se trabaja con preguntas.

Por eso, la pregunta puede tener una deseable función de «motivación inicial al principio del tema» si su planteamiento resulta sugerente y encamina al alumno a una búsqueda de respuestas en el contenido presentado a posteriori. Esta motivación no solamente hace referencia a preguntas lanzadas desde el comienzo del tema para introducir al alumno en los contenidos a presentar. Pueden ser situaciones cotidianas que ejemplifiquen esos contenidos; pero, ¡ojo!, no estamos hablando del típico «ejemplito» que con dos líneas y un pequeño dibujo sirven de introducción a un apartado determinado.

Exposición de conceptos 3.1.2

Dos variables condicionan cualquier diseño de material instructivo:

11.El marco curricular en el que se inscribe.

2a.Los usuarios destinatarios.

Según esta última, es fundamental que el material se ajuste a las características cognitivas de los alumnos y que, metodológica y didácticamente, la exposición de conceptos se someta y adapte al nivel de comprensión de los mismos. Es importante considerar de nuevo las ideas de Piaget sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y las recomendaciones del Informe Cockcroft. Ya se hizo mención a las aportaciones en forma de principios de aprendizaje de las Matemáticas y que ahora extractamos en torno al tema que nos ocupa; estas serían las consideraciones oportunas:

11.Para la introducción de conceptos matemáticos es óptimo recurrir a actividades de tipo lúdico.

2a.El acometimiento de conceptos de cierta dificultad se realizará formalizando experiencias didácticas variadas.

3a.Abordar conceptos de orden superior desde la definición de los mismos es inadecuado. Conviene presentarlos a través de ejemplos que, a la postre, son conceptos ya formados.

El libro de texto se presta a favorecer el aprendizaje individual y autónomo o presentarse para formas de enseñanza colectiva. Entre ambos supuestos, existen fórmulas intermedias donde una estructura colectiva recoge situaciones individuales o individualizadas, o bien una situación individual se presta a ofrecer elementos colectivos. Sea como sea, el interés estriba en atender las diferencias individuales y alcanzar una de las características más importantes del texto escolar: servir de soporte y estímulo para una variada

cantidad de actividades de aprendizaje en las que el alumno pueda ejercitar sus facultades.

En principio parece que el libro constituye una herramienta para el trabajo individual, y aun cuando predominan los ejercicios para este tipo de trabajo, sin embargo, una perspectiva didáctica amplia no puede ignorar la necesidad de que englobe estímulos para el trabajo socializado.

La perspectiva proyectada desde la segunda variable (usuarios) y las tres ideas mencionadas justifica la «adaptación al nivel de comprensión del alumno y a las diferencias individuales».

La fundamentación de ciertos aprendizajes en otros ya previamente consumados, posibilita la presencia de conceptos que sirven como base para la adquisición de otros nuevos. Por tanto no debemos desdeñar un excelente centro de interés como es la «presencia de preconceptos» que cumplen dos funciones primordiales: una continuidad lógica entre aprendizajes (precedente y posterior), y la evitación de vacíos o lagunas en la adquisición de determinados aprendizajes.

En cuanto a lo que es propiamente la «presentación de conceptos», en el mundo occidental los mecanismos mentales que dirigen el ojo del lector están condicionados para introducirse en una hoja impresa según las coordenadas «de arriba abajo y de izquierda a derecha». Siguiendo tales pautas lo lógico es que el título aparezca en la parte superior de la página, y los subtítulos hacia la izquierda de la página y, ocasionalmente, en el centro. Otras características a cuidar son: preferibles las descripciones y/o nociones elementales antes que las definiciones. La descripción es una definición imperfecta de un concepto mediante una idea general de sus partes o propiedades. En tanto, la definición es una proposición que expone con claridad y exactitud las características genéricas y diferenciales de un concepto. En estas edades es recomendable alejarse de los tecnicismos, y buscar el acercamiento y la aproximación a la comprensión de las ideas

mediante palabras cercanas al niño.

También es fundamental contemplar la figura del resumen de conceptos más importantes para facilitar la retención de un texto. Si en él aparecen los puntos básicos de la lección, se obtiene una doble presentación de esos contenidos, aumentando con ello la posibilidad de ser retenidos. En cuanto a su ubicación, antes o después, distintas investigaciones - PARKER (1962); VEZIN, BERGE y MAVREI.I.IS (1974); HARTLEY, GoI.DIE y STEEN (1976) y RICHARDEU (1981) - apuntan su inserción como resumen posterior al conjunto de conocimientos objeto de tal resumen.

3.1.3 Presentación de los contenidos de las Matemáticas

Hay una pregunta que se nos antoja atrevida en su planteamiento, pero de una importancia clave. La presentación de los contenidos de las Matemáticas en los programas oficiales, ¿responde a las necesidades de cada alumno para alcanzar los objetivos propuestos y permite trabajar las diferencias entre alumnos?

Consideramos que el nivel de profundización de cualquier planteamiento metodológico y didáctico pasa por explicar, con detalle, este concepto en base a las diferencias individuales presentes en el aula.

La filosofia de este nivel de profundización responde a una situación, por supuesto genética (vulgarmente diríamos que «cada uno es de su padre y de su madre»), pero a veces contextualizada y acentuada en el propio aula. Es inherente al desarrollo del proceso de instrucción por la existencia de distintas capacidades, diversos niveles intelectuales y diferentes rendimientos académicos alcanzados. Por tal razón se genera una conveniencia que, en la práctica, al profesorado le resulta difícil de emprender. Hemos apuntado, en varias ocasiones, la dificultad de aunar en una misma línea metodológica de trabajo la atención requerida para cada alumno cuando, desgraciadamente, en ocasiones nuestra escuela presenta una masificación empobrecedora de la

actividad docente/discente.

Tomando como criterios el potencial intelectual y el rendimiento académico, el conjunto de alumnos del aula puede dividirse en cuatro grandes grupos. Estas serían sus características definitorias más generales:

1. Alumnos de potencial intelectual alto y rendimiento notable que mantienen una regularidad constante. Es uno de los grupos, sin duda alguna, amenazados directamente por la masificación. Su progreso o grado de adquisición es factible estancarse cuando el ritmo del trabajo escolar disminuye considerablemente.

2. Alumnos de inteligencia y rendimiento normal susceptibles de fluctuaciones, pero sin graves impedimentos para alcanzar los objetivos previstos. Su constancia es irregular durante ciertos períodos, como son los recesos vacacionales, las enfermedades de larga duración, pérdida de motivación pasajera, etc.

3. Alumnos de inteligencia por debajo de lo normal y escaso rendimiento. Con muchísimo trabajo y dedicación alcanzarían los mínimos exigidos. El esfuerzo necesario para integrarse dentro de la normalidad es de tal magnitud, que se aleja bastante de sus posibilidades reales. No basta con las clases de recuperación y de apoyo, sino con una constante motivación, fuera y dentro del colegio, que les facilite trabajar en una actividad diaria muy dura para ellos. Hay que forzarles a conseguir unos hábitos de dedicación, organización y trabajo que no poseen por falta de refuerzo. Y repetimos, no es suficiente con lo escaso que el medio les brinda si tenemos en cuenta la masificación del aula.

4. Alumnos de escasa inteligencia y nulo rendimiento. Se adivina en ellos un fracaso escolar probable. Precisan de una asistencia individualizada, a veces inexistente. Si los alumnos del primer grupo eran los más amenazados por la desproporción en la ratio del aula, este otro grupo se

constituye como el de los más perjudicados. Sus posibilidades intelectuales son muy limitadas, pero jamás definitorias en el sentido de hacerles creer que no sirven absolutamente para nada. Son alumnos a quienes les cuesta adquirir las operaciones básicas, con escaso poder de razonamiento y, lo que es más grave, muy concienciados de su cada vez mayor distanciamiento con respecto a los demás. Su desmotivación es creciente y desemboca en la apatía hacia la escuela y el ostracismo en ella.

Este espectro del componente humano del aula nos advierte de qué manera debemos actuar como enseñantes, buscando dos parámetros fundamentales, el grupo y el individuo, y pretendiendo justificar la asistencia docente en función de unos objetivos para tales fines.

Ahora bien, ¿cómo se diseñan los programas? Este es el fundamento básico de la operatividad de los objetivos. Tras su formulación y distinción entre objetivos comunes e individuales, es precisa la identificación como tales para cohesionar el proceso. Esta distinción, en principio, atiende a unas razones estratégicas muy concretas. Los alumnos deben conocer con antelación el trabajo que desarrollarán durante un período de tiempo dado. La actividad escolar irá enfocada de forma que su adecuación a las capacidades reales del grupo sea lo más aproximada (objetivos comunes), pero sin acentuar jamás las diferencias individuales hacia el éxito de unos en detrimento del fracaso de otros; es decir, para no actuar en precario, necesitamos unos objetivos individuales que satisfagan el potencial adquisitivo de los aventajados, así como salvar la impotencia de los más desfavorecidos.

RoMBERG y CARPENTER (1986) indican que aún no se ha conseguido adaptar la instrucción de la Matemática a las diferencias individuales. Acerca de éstas convienen ambos en determinar si tal instrucción ha de ejercitarse para nivelar la diversidad, o si bien ha de diseñarse para respetar las diferencias. En definitiva, plantean una disyuntiva incierta: igualar a los

alumnos o respetar las diferencias individuales.

El sistema educativo de los setenta de nuestro país, a pesar de que los Programas Renovados manifestaban una tendencia a eliminar aquello que la experiencia demostró no ser asequible al desarrollo evolutivo de los alumnos (Vida Escolar 1981: 3), algunos contenidos, su presentación y la accesibilidad de todo tipo de alumnos a los mismos, no parecían los más idóneos.

La presentación de los contenidos en los Programas Renovados se hace mediante una pequeña introducción al inicio de cada Bloque Temático. Analizando estos prólogos se confirma cierta disponibilidad metodológica de cómo abordar los temas en cuestión y los conceptos en ellos aparecidos, por supuesto desde la consideración de ciclo y no la de curso, esta última quizá más coherente en el tratamiento de las diferencias individuales.

Sea como fuere, «la presentación de los contenidos en los programas, NO responde a las necesidades de cada alumno para alcanzar los objetivos propuestos yNO permite trabajar las diferencias entre alumnos».

Capítulo **4**

Principios del aprendizaje

No debemos restar importancia a la trascendental aportación que las teorías psicológicas han brindado a la Educación, desde una conceptualización rigurosa de los fenómenos, hasta la interpretación más prolija de los mismos establecida desde la vía experimental. El fin último de estos esfuerzos se ha guiado con fundamento riguroso hacia el análisis de procesos, variables y fenómenos psicoeducativos.

Es por ello que han de considerarse los principios del aprendizaje que todo contenido conlleva, así como la adecuación a la fase evolutiva del alumno al cual va dirigido.

En este tratado mencionamos cuarenta y cuatro principios del aprendizaje, unos de carácter general y otros específicos de las Matemáticas. Los desglosamos por autores y mantenemos la numeración secuenciada.

De todos estos principios elegiremos los que por su naturaleza, finalidad o incluso redacción, resultan fácilmente aplicables a situaciones didácticas en el ámbito de las Matemáticas. Aspiramos a alcanzar un grado de operacionalización de estos principios que facilite con su simple lectura, por una parte, la comprensión del fin que lleva en sí mismo y, por otra, la transferencia a los contenidos de los libros de texto.

Principios del aprendizaje del paradigma conductual 4.1

1. Cuando el estímulo y la correspondiente respuesta se producen en intervalos cortos, terminan asociándose.

2. La repetición frecuente de lo que se aprende se llega a automatizar.

3.Sólo se repite aquello que, en virtud de sus consecuencias, es satisfactorio, motivador, estimulante o agradable. Todo lo que no sea así, se evitará.

4.2 Principios del aprendizaje general de Burton

4.El proceso de aprendizaje consiste en experimentar la acción que ha de ser aprendida, pero simultáneamente tiene lugar una multitud de variadas actividades y resultados de aprenclizaje.

5.El proceso de aprendizaje se produce mediante una amplia variedad de experiencias y materias de estudio.

6.Las respuestas del individuo durante el aprendizaje son modificadas por las consecuencias de éste sobre aquél.

7.El objetivo del aprendiz domina la situación de aprendizaje y conduce a resultados deseables.

8.A la inicial necesidad y existencia de una finalidad se une, en un momento dado, una motivación intrínseca o extrínseca.

9.La madurez y la experiencia del alumno deben ser quienes ajusten el proceso de aprendizaje por encima de otras consideraciones.

10.El conocimiento de los progresos y las deficiencias, y la fijación del nivel de competencia (objetivos reales a conseguir según capacidades), influyen de forma positiva en el desarrollo del proceso de aprendizaje.

11.El proceso de aprendizaje se facilita bajo la orientación didáctica de personas del entorno del alumno.

12.Los productos del aprendizaje son normas, valores, significados, actitudes, valoraciones, aptitudes y destrezas.

13. Los productos del aprendizaje logrados son los que satisfacen una necesidad y al mismo tiempo son útiles.

14. Si las condiciones del aprendizaje son óptimas y la disposición del alumno positiva para recibirlo, lo que se aprende se integra de forma adaptable según las necesidades. La transferencia del aprendizaje se realizará eficazmente cuando el alumno descubra las relaciones entre tareas distintas.

15. La automatización de ciertos aprendizajes mediante memorización o mera repetición, puede resultar nociva si el que aprende no descubre el significado de la reiteración. Además de practicarla, es conveniente espaciarla o distribuirla antes que ejercitarla durante largos períodos.

4.3 Principios del aprendizaje general de Heredia Ancona

16. El reforzamiento favorece el aprendizaje.

17. Se aprenden mejor las actividades realizadas intencionalmente.

18. La organización de la información dentro de un contexto favorece el aprendizaje.

19. El conocimiento de los resultados de la propia actividad favorece el aprendizaje.

Principios del aprendizaje lógico de las Matemáticas de Piaget 4.4

20. La formación de conceptos matemáticos irá precedida de experiencias lúdicas, estructuradas y prácticas que sirvan de introducción para aquéllos.

21. Es importante posponer el análisis para edades más avanzadas y centrarse en la construcción del conocimiento.

22. Los conceptos que se componen de más de una variable se abordarán a través de experiencias donde todas y cada una de esas variables sean tratadas.

23. Dado que a estas edades el conocimiento se dirige gradualmente hacia un proceso de abstracción, conviene que el cuerpo de conocimiento se presente, si es posible, de distintas formas. En este modo de actuar se captará lo que de común y frecuente presentan las diferentes opciones, lo que provoca la generalización y formalización del concepto.

Principios psicopedagógicos básicos de la enseñanza de la Matemática Moderna de Piaget 4.5

24. Para entender realmente un concepto, una idea, una noción, etc., es necesario que el alumno la reinvente a través de procesos de equilibración.

25. Cuando un alumno es incapaz de expresar con palabras lo que sí puede hacer o comprender, deben plantearse aprendizajes donde se impliquen, de forma realista y consciente, los procesos de razonamiento del alumno.

26. La creación de una estructura, a modo de nexo, entre la Matemática natural de los alumnos y las Matemáticas formales, puesto que las estructuras utilizadas en una y otras no son las mismas, es esencial para organizar el contenido de las Matemáticas de manera que, las actividades propuestas, se presten a favorecer el desarrollo de las ideas intuitivas hacia un proceso de formalización sistemático.

Principios del aprendizaje significativo de Ausubel 4.6

27. El aprendizaje significativo presupone la asimilación eficaz del nuevo contenido.

28. El aprendizaje significativo confiere la construcción de nuevos

conocimientos y la variación de las estructuras ideativas en función de las recientes apropiaciones.

29. Conforme se aprende, el alumno adquiere una diferenciación progresiva de los nuevos contenidos.

30. El aprendizaje significativo supone una reconciliación integradora de todos los contenidos de aprendizaje.

4.7 Principios del aprendizaje significativo (LOGSE)

31. Asegurar la relación de las actividades de enseñanza y aprendizaje con la vida real del alumnado partiendo, siempre que sea posible, de las experiencias que posee.

32. Facilitar la construcción de aprendizajes significativos, diseñando actividades de enseñanza y aprendizaje que permitan a los alumnos y alumnas establecer relaciones sustantivas entre los conocimientos y experiencias previas y los nuevos aprendizajes.

33. El enfoque globalizador que caracteriza este etapa requiere organizar los contenidos en torno a ejes que permitan abordar los problemas, las situaciones y los acontecimientos dentro de un contexto y en su globalidad.

34. La interacción alumno-profesor y alumno-alumno es esencial para que se produzca la construcción de aprendizajes significativos y la adquisición de contenidos de claro componente cultural y social.

35. Potenciar el interés espontáneo de los alumnos en el conocimiento de los códigos convencionales e instrumentos de cultura, sabiendo que las dificultades que estos aprendizajes comportan pueden desmotivarles y que, por tanto, es necesario preverlas y graduar las actividades para llevar a cabo dichos aprendizajes.

36. Tener en cuenta las peculiaridades de cada grupo y los ritmos de aprendizaje de cada niño o niña concretos para adaptar los métodos y los recursos a las diferentes situaciones, e ir comprobando en qué medida se van incorporando los aprendizajes realizados y aplicándolos a las nuevas propuestas de trabajo y a situaciones de la vida cotidiana.

37. Proporcionar continuamente información al alumno sobre el momento del proceso de aprendizaje en que se encuentra, clarificando los objetivos por conseguir, haciéndole tomar conciencia de sus posibilidades y de las dificultades por superar, y propiciando la construcción de estrategias de aprendizaje motivadoras.

38. Impulsar las relaciones entre iguales proporcionando pautas que permitan la confrontación y modificación de puntos de vista, la coordinación de intereses, la toma de decisiones colectivas, la ayuda mutua y la superación de conflictos mediante el diálogo y la cooperación.

39. Diseñar actividades, en el ámbito del ciclo y de la etapa, para conseguir la plena adquisición y consolidación de contenidos teniendo en cuenta que muchos de ellos no se adquieren únicamente a través de las actividades desarrolladas en el contexto del aula.

Principios de la Matemática Realista 4.8

40. Contribuye al bagaje cultural de las personas.

41. Intenta salvar el dualismo saber-utilizar Matemáticas.

42. No debe ser separada de las demás ciencias.

Principios del aprendizaje de las Matemáticas del Informe Cockcroft 4.9

43. Los conceptos de orden superior ya poseídos, no deben enseñarse según una definición. Deben «atacarse» mediante una colección adecuada de

ejemplos.

44. Como en Matemáticas estos ejemplos son a la postre otros conceptos, debemos asegurarnos de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende.

Ideas de Piaget: períodos evolutivos 4.10

Al igual que se ha procedido con los principios del aprendizaje, debemos actuar con las ideas piagetianas sobre el período evolutivo de los alumnos y recensionar brevemente las más señeras.

La transición desde el estadio anterior («preoperacional») al de las «operaciones concretas» (siete a once años), se desarrolla paulatinamente desde operaciones sencillas, como la conservación del número o la longitud, hasta otras de cierta dificultad donde aún sigue prevaleciendo la intuición (por ejemplo, la conservación del volumen).

En este período que nos ocupa ya se es capaz de realizar operaciones mentalmente, lo que permite plantear y resolver problemas de tipo concreto. También comprende distintas maneras de agrupar factores integrantes en la consecución de una meta propuesta mediante la asociación. De igual modo, distingue la identidad de un ente, lo que le faculta para discernir la relación de los restantes elementos con ese todo. Y predomina la composición, que determina las relaciones del todo con sus partes y de las partes entre sí.

El pensamiento se hace reversible, en el sentido de volver a un punto de inicio en la actividad mental emprendida. La reversibilidad del pensamiento es condición necesaria, aunque no suficiente, para que la «operatividad» tenga lugar en la estructura mental y, además, es potestad básica donde fundamentar cualquier conocimiento lógico-matemático.

Consecuciones interesantes son la traslación desde lo concreto a lo

hipotético y que el pensamiento ya no está tan centrado; conseguirá pues adquirir conceptos acabados, completos y trasladables. En cuanto a las habilidades matemáticas, manejan números y relaciones entre objetos uno a uno y la conservación del número le facilita la agrupación entre elementos de un conjunto.

4.11 «Operacionalización» de los principios del aprendizaje

Tras esta revisión de principios del aprendizaje e ideas piagetianas nos restaría proceder a la «Operacionalización» de los principios de aprendizaje:

1. La construcción del conocimiento se realizará desde la variedad de actividades y experiencias que posibiliten más fácilmente el aprendizaje, provoquen la generalización y formalización de los conceptos en función de recientes apropiaciones y desde la integración de todos los contenidos de aprendizaje, siempre en función de una variedad de experiencias cercanas al alumno.

2. Los conceptos de orden superior a los ya poseídos, no deben enseñarse según una definición, sino abordarse a través de una apropiada colección de ejemplos.

3. La formación de conceptos matemáticos basada en actividades donde predomina el carácter lúdico es una inmejorable introducción para aquéllos.

4. El establecimiento de los niveles de competencia, traducido en objetivos educativos, influye en los logros y en un mejor desarrollo del proceso de aprendizaje.

5. Los productos del aprendizaje se interpretan desde la consecución de objetivos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

6. El conocer resultados de la propia actividad reafirma el aprendizaje.

7. Las relaciones entre tareas distintas provoca que la transferencia del aprendizaje se realice de modo eficaz.

8. El reforzamiento favorece el aprendizaje.

9. La automatización de aprendizajes mediante memorización no es factible si quien aprende no descubre el significado de la repetición.

10. La información organizada en un contexto favorece el aprendizaje.

Capítulo 5

Tipos de aprendizaje matemático

Cuatro son los tipos de aprendizaje matemático; a saber:

-Memorización.

-Aprendizaje algorítmico.

-Aprendizaje de conceptos.

-Resolución de problemas.

Conceptuaremos cada uno de ellos por separado, pero es conveniente hacer la siguiente aclaración. La Psicología cognitiva basada en el modelo de procesamiento de la información, y los planteamientos piagetianos y neopiagetianos, tienen en cuenta la necesidad de desarrollar, en todo proceso de instrucción, dos dimensiones del conocimiento que englobarían a las cuatro clases de aprendizaje matemático.

En la primera dimensión se mencionan los cuerpos organizados de conocimiento: datos almacenados en la memoria, estructura organizada de cuerpos de conocimiento, conocimiento figurativo y conocimiento proposicional.

En la segunda, los procesos metodológicos implicados en las nuevas adquisiciones que, sobre todo, incrementan el bagaje cognitivo y su aplicabilidad en otras situaciones (conocimiento algorítmico, operativo, estrategias específicas de procesamiento).

Memorización 5.1

La memorización ha sido durante años la panacea a muchos males de malos estudiantes, valga el juego de palabras. Sin duda este proceso en pocas ocasiones se ha desarrollado en función de una memoria operativa, en el sentido de lograr un almacenamiento de la información a largo plazo junto a una rápida memorización. Una idea muy aproximada a la operatividad se consigue cuando se realiza un aprendizaje sobre estructuras significativas de conocimientos.

El estudio de la memoria desde diferentes disciplinas ha suscitado un gran interés. Las investigaciones neurofisiológicas efectuadas intentan establecer, por una parte, cuáles son sus bases biológicas. Por otra, hallar la naturaleza de las huellas mnésicas que se conjetura ha de dejar el conocimiento en alguna zona del tejido cerebral. De momento, los esfuerzos han resultado inútiles.

Como no todas las personas poseemos el mismo tipo de memoria, los hechos se recuerdan diferentes y de distinta manera. No obstante, y por lo que se refiere a la memorización, hay ciertas ayudas de gran provecho y generalizables para cualquier sujeto. En primer lugar debe omitirse cualquier intento de basarla en la simple repetición mecánica. Esto se evita organizando los conceptos mediante una interrelación lógica de los mismos. Una vez conseguida la memorización de los datos, conceptos, etc., es importante fijarla mediante repasos mentales sistemáticos o servirse de la ayuda de esquemas; está comprobado cómo las lecturas repetitivas de los textos son infructuosas e incluso perjudiciales. Un último factor, que interviene de manera positiva en la memorización, es el fraccionamiento del tiempo en períodos más cortos y espaciados.

5.2 Aprendizaje algorítmico

El segundo tipo de aprendizaje matemático, el algorítmico, requiere hacer uso de la memoria para interpretar el procedimiento correcto. El problema surge, precisamente, en el fundamento de la mencionada memoria operativa,

traducido en la escasa o nula significatividad que poseen los algoritmos matemáticos. ¿Cómo justificar el aprendizaje y uso de algoritmos como la multiplicación larga, la división larga, y todas las operaciones con números racionales? El recurso más válido es advertir de su necesidad en función de una «economía de medios», que a la postre le resultará ventajosa: «usa esto que es lo mejor». Presentarlos como procesos de rutina, lejos de una comprensión que el alumno puede tardar en adquirir.

SKEMP (1980) acuñó los conceptos de «comprensión relacional» y «comprensión instrumental» para clarificar esta situación. ORTON (1990) mantiene que comprender Matemáticas es, sobre todo, reconocer en qué contexto se puede utilizar un concepto y en cuál no. Del mismo modo se expresa COCKCROFT (1985: 84), distinguiendo entre «comprensión relacional» - nos permite saber qué hacer en casos muy particulares y relacionarlos con conocimientos matemáticos más generales - y «comprensión instrumental» - una forma de memorizar reglas para casos concretos sin llegar a integrar y comprender su funcionamiento-.

El aprendizaje de las tablas de multiplicar forma parte de este tipo de enseñanza instrumental de las Matemáticas, donde resulta sorprendente contemplar el cumplimiento de la «ley del ejercicio» de los primeros conductistas. Decía este principio que la probabilidad de producirse una respuesta, cuando vuelve a presentarse la situación, es mayor si se crea un nexo sólido entre el estímulo y la respuesta, siendo la práctica continua quien fortalece las conexio nes. En otras palabras, la repetición reiterada de lo que se aprende se automatiza. Así es como, generación tras generación, se han aprendido las tablas. Pero no es la mejor forma. Dotar de significado a esa automatización es un paso previo y consiste en dar a conocer el fundamento de tal operación en función de la suma, siempre de una manera lógica y significativa. Probemos con nuestros alumnos a construir las tablas del 11, del 12, del 1.000, del 2.000.000... o del 8 desde el 11 hasta el 20, del 4 desde el 100 hasta el 110. Siempre que lo hagamos desde la fundamentación de la

suma, nos sorprenderemos de cómo la motivación es mayor.

En general, la aritmética se presenta como un modelo de estímulo-respuesta, siendo el primero la ejecución de una forma numérica (representada gráficamente) y, la segunda, la solución que se va a proporcionar. Esta presentación, tan mecanicista, a parte de no concienciar al alumno de lo que realiza, le lleva a cometer errores por culpa de esta excesiva automatización. Es lógico pues, y harto frecuente, situaciones donde los alumnos cometen errores del tipo «5 x 5 = 10», consecuencia de un aprendizaje mecánico de la suma trasladado a la multiplicación.

Aprendizaje de conceptos 5.3

La definición de concepto matemático no es fácil por el carácter de abstracción que poseen las Matemáticas. Ha de pensarse que éstas consisten en una construcción jerárquica, unos conceptos sobre la base de otros, donde los de rango superior no se transmiten por simple definición porque, como señaló SKF.MP (1980: 31), un concepto no es definible en sí mismo, aunque sí ejemplificable. ORTON (1990: 48) apunta en la misma dirección cuando indica la utilización de ejemplos como el mejor factor de ayuda en las definiciones matemáticas de un concepto. En este sentido, COCKCROFT (1985: 84) destaca que la comprensión matemática debe conseguirse mediante la realización de trabajos prácticos o resolución de problemas. LOVEI.I. (1986: 25) lo define como una generalización, a partir de datos relacionados, que posibilita responder a estímulos específicos de una manera determinada.

Resolución de problemas 5.4

Aunque nos ocuparemos de este tipo de aprendizaje con más profundidad en la segunda parte del libro, conviene generalizar sobre la resolución de problemas. Es un proceso donde se combinan distintos elementos que el alumno posee, como son los preconceptos (por lo general, aquellos

conocimientos previamente adquiridos y que sirven en una nueva situación), las reglas, las destrezas... Exige una gran dosis de reflexión y depende de una excelente provisión de conocimientos y capacidades, más que por su cantidad por su clara comprensión. Es importante que este aprendizaje se sustente en la realidad (situaciones de la vida) y que, quien aprenda, lo haga otorgando en la aplicación matemática la utilidad que representa.

El National Council of Teachers of Mathematics de Estados Unidos divulgó ciertas recomendaciones encaminadas a la mejora de la enseñanza de esta asignatura. Una de ellas, y considerada como enfoque principal de las Matemáticas curriculares, fue la resolución de problemas. Esta propuesta debía contar con un lenguaje propio desarrollado de modo que exhiba un abanico amplio de estrategias, procesos y formas de presentación que integren todas las posibilidades de aplicación en Matemáticas. Es evidente una serie de acciones que favorecen la aplicabilidad de este enfoque:

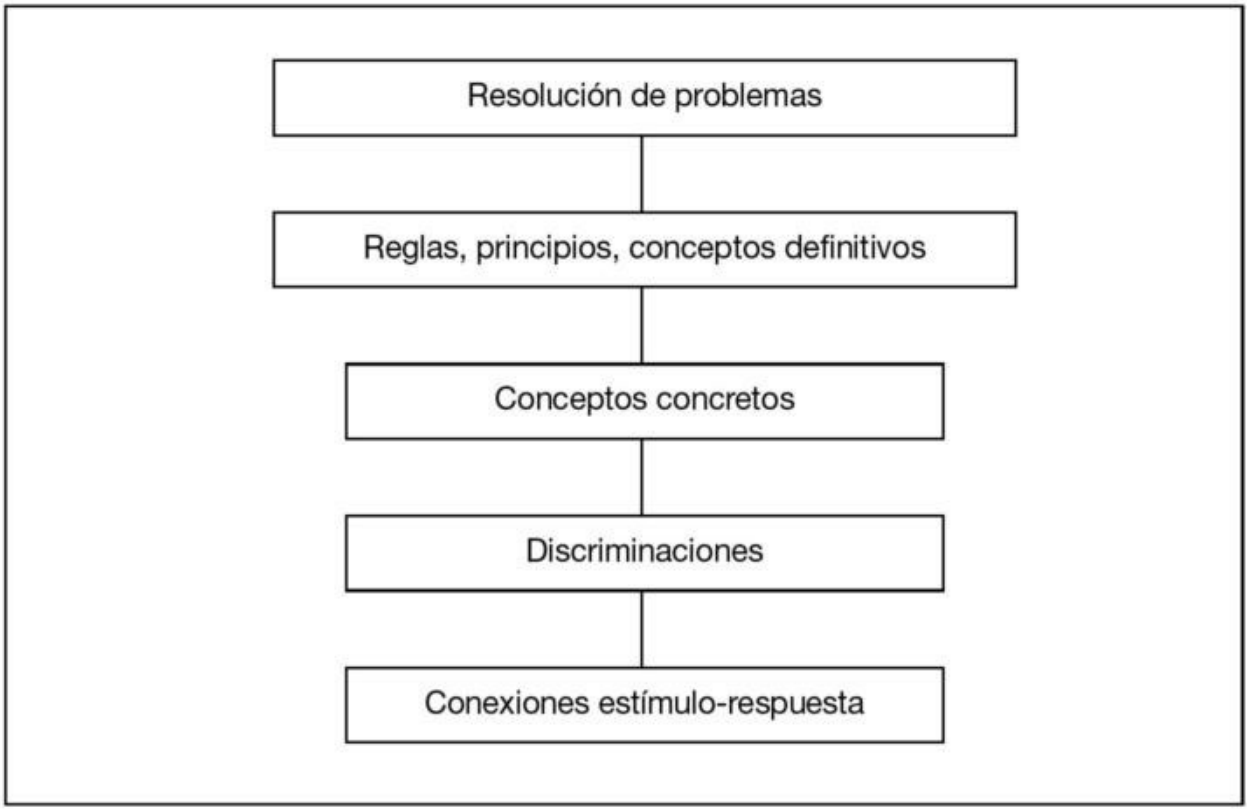
-Elaborar materiales adecuados.

-Desarrollar métodos y procedimientos válidos mediante investigación.

Otro punto a considerar es la programación de cómo distribuir el tiempo de las sesiones de clase en función de la resolución de problemas, y no según las explicaciones del profesor u otras actividades. Este reparto debe considerar las distintas modalidades de trabajo, como es el individual, de pequeño grupo y de gran grupo. También ha de afianzarse el uso de estrategias instructivas, como por ejemplo generar situaciones de descubrimiento e investigación que fundamenten el aprendizaje básico. Por último, recordar el empleo de medios audiovisuales y referencias externas al aula como recursos aprovechables.

Cuando mencionamos la regla como elemento combinatorio del proceso de resolución de problemas, se pretende manifestar la idea de Gagné, que entendió éste como una de las formas más elevadas de aprendizaje.

JERARQUÍA LINEAL DE APRENDIZAJE EN LA «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS»



El aprendizaje resulta un proceso donde se descubre una combinación de reglas aprendidas con antelación. En este contexto, definimos la regla como algo demostrable, porque se ha establecido con anterioridad, y que facilita enfrentarse a nuevas problemáticas.

Consideración importante acerca de la resolución de problemas es su descontextualización. Si redactamos problemas lejos de la realidad más inmediata del alumno, carentes de interés por su contenido, es fácil que el desánimo cunda con rapidez. Es imprescindible afianzar unas condiciones como las sugeridas por Mialaret (BUJANDA JÁUREGUI 1981: 93-94):

-Problema adecuado:

- A los conocimientos previos.

•A las posibilidades cognitivas del alumno.

-Problema motivador.

-Problema que favorezca la formación integral.

-Colección de problemas: al menos uno que todos puedan resolver.

El objetivo de la resolución de problemas no es la búsqueda particularizada de una solución concreta, sino facilitar el conocimiento de las destrezas básicas, los conceptos fundamentales y la relación entre ambos. Y por supuesto, el desarrollo de habilidades para resolver, mediante determinadas estrategias, una gama de problemas.

Para finalizar con la presentación de este importante aprendizaje matemático, reproducir las palabras de Poi.YA (1989: 7) sobre el valor formativo de la resolución de problemas:

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema; pero en la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento.

El problema es una cuestión que precisa creatividad de quien aprende, exigiéndole una incorporación de elementos de aprendizajes precedentes para lograr su solución. Cuando un problema se halla resuelto, algo nuevo se aprende.

Capítulo **6**

Tratamiento en los libros de texto actuales de los cuatro tipos de aprendizaje matemático

Una de las preguntas más interesantes que podemos formularnos sobre los libros de texto de Matemáticas, es la de si realizan un tratamiento específico y sistemático de los cuatro tipos de aprendizaje matemático.

Existen dos términos en esta pregunta, «específico» y «sistemático», que debemos contextualizar, primero para comprender el alcance de la misma y segundo, para situar adecuadamente nuestro trabajo de análisis. Por «específico» entendemos aquella disposición del libro de texto para facilitar, de manera puntual y reglada, la instrucción de los cuatro tipos de aprendizaje. Con el adjetivo «sistemático» queremos señalar la continuidad de estos cuatro aprenclizajes en los temas del libro.

Es importante puntualizar que no se persigue, bajo ningún pretexto, confundir los fines de estos tipos de aprendizaje; todos son ponderados por igual. Resaltar también que ningún tipo, por su naturaleza, ni aglutina ni excluye a otro u otros tipos de aprendizaje.

Recordamos brevemente la descripción de los cuatro tipos de aprendizaje matemático desde la perspectiva del análisis que perseguimos.

•Memorización. El concepto de memorización ha de entenderse en función de una memoria operativa, que actúa sobre estructuras significativas de conocimientos y cuya finalidad es almacenar, a largo plazo, la información nueva. En base a esto debe omitirse cualquier intento de basarla en la simple repetición mecánica, para lo que es indispensable

interrelacionar de forma lógica los conceptos. Una vez conseguida la memorización de los datos, conceptos, etc., es importante fijarla mediante repasos mentales sistemáticos o servirse de la ayuda de esquemas; está comprobado cómo las lecturas repetitivas de los textos son infructuosas e incluso perjudiciales.

•Aprendizaje algorítmico. Este tipo de aprendizaje es, sin lugar a dudas, cuando menos paradójico. Precisa de la memoria, para inferir el método exacto, y lleva añadido la dificultad ante la escasa o nula significatividad que poseen los algoritmos matemáticos a priori. Para solventar la dificultad que pudiera entrañar, lo más factible es presentarlos como procesos de rutina y averiguar en qué contexto se puede utilizar un concepto y en cuál no; en todo caso, como norma general, una estrategia adecuada para no entrar en conflictos es distinguir entre «comprensión relacional» (saber qué hacer en casos concretos y estar preparado para relacionar estos procedimientos con conocimientos matemáticos más generales) y «comprensión instrumental» (memorización maquinal de reglas para cada caso concreto sin comprender su funcionamiento).

•Aprendizaje de conceptos. El carácter de abstracción que poseen las Matemáticas hace difícil la definición de concepto matemático; es más, el hecho de constituirse en un saber donde predomina la construcción jerárquica de unos conceptos sobre la base de otros, dificulta sobremanera esa posible definición, sobre todo considerando que los conceptos de rango superior no se transmiten por simple definición, porque un concepto no es definible en sí mismo, aunque sí ejemplificable. El uso de ejemplos es, sin duda, el mejor factor de ayuda en las definiciones matemáticas de un concepto. En este sentido apuntar la realización de trabajos prácticos o la resolución de problemas como excelentes fundamentos para conseguir la comprensión matemática.

•Resolución de problemas. Resolver problemas no es buscar una solución

concreta; consiste en facilitar el conocimiento de las destrezas básicas, los conceptos fundamentales y la relación entre ambos. En definitiva, es un proceso donde combinando distintos elementos que el alumno posee, como son preconceptos, reglas, destrezas, etc., una buena dosis de reflexión y una óptima provisión de conocimientos y capacidades, se enfrenta al alumno a situaciones, preferiblemente de la vida real, donde las Matemáticas adquieren un papel preponderante y necesario. Para que los problemas sean pertinentes han de ser adecuados (a los conocimientos previos y a las posibilidades cognitivas de los alumnos), motivadores y favorecedores de la formación integral. Además, se apuesta por presentar una colección de problemas y que al menos uno pueda ser resuelto por todos los alumnos.

Con el fin de delimitar al máximo el campo de análisis, el registro que realizaremos de los tipos de aprendizaje consistirá en determinar:

1°.Si todos los temas de los libros de texto (correspondientes a los cursos de tercero, cuarto y quinto de Educación Primaria de seis editoriales) presentan estas cuatro situaciones de aprendizaje.

2°.Si una vez satisfecha la condición anterior, además cumplen con los requisitos establecidos de cómo deben presentarse cada tipo de aprendizaje, a saber:

a)Memorización. Buscamos apartados tipo «Recuerda» o «Memoriza» que se ajusten a enunciados esquemáticos interrelacionados con otros.

b)Aprendizaje algorítmico. En estos cursos hay que distinguir entre algoritmos de continuación (sumas, restas, etc.) e iniciación (división, sumas de decimales, etc.). Cualquiera que sea la situación presentada, examinamos actividades o ejercicios con tal aprendizaje.

c)Resolución de problemas. Dada la importancia conferida a este aprendizaje,

valoramos que los problemas planteados no sean, exclusivamente, mera aplicación de un algoritmo.

d) Aprendizaje de conceptos. Para este tipo de aprendizaje valoramos la presentación del concepto mediante nociones elementales y, al menos, con un ejemplo lo suficientemente esclarecedor.

La presentación de resultados se ofrece en las tablas de los cuadros n° 7, 8 y 9 de los ANEXOS.

El comentario sobre la tabla n° 7 gira en torno a un término, «disparidad». Salvo la cuarta editorial que no cumple condición alguna, en el resto hallamos de todo. De los cuatro tipos de aprendizaje, los peores parados, y casi en la misma proporción, son el de memorización y la resolución de problemas.

En la tabla n° 8, del cuarto curso, descubrimos tabulados los mismos datos; los comentarios, es obvio, los mismos.

En el quinto curso, tabla n° 9, el tratamiento que realiza la primera de las editoriales sobre la memorización es excesivo: en todos y cada uno de los apartados de las lecciones. Sorprende ver, en este curso, un tratamiento distinto por parte de la mayoría de las editoriales al aprendizaje algorítmico con respecto a cursos anteriores.

Enfoque metodológico de la resolución de problemas en los libros de texto de Matemáticas 6.1

El papel que juega la «resolución de problemas» en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es tal, que la concepción de esta asignatura se ha enriquecido con él. Hasta el punto de convertirse en una metodología diferente de enseñar y aprender, lejos de la simple aplicación de conceptos o conocimientos previamente aprendidos que, en la mayoría de las ocasiones,

ha representado este tipo de metodología.

Es por eso que deseamos conocer si tal enfoque es el adecuado, como aconsejan diversos informes internacionales sobre la enseñanza de las Matemáticas.

La intencionalidad de este planteamiento se dirige, primeramente, a constatar en qué medida los libros de texto presentan este tipo de aprendizaje matemático; en segundo lugar, a verificar si el enfoque dado a la resolución de pro blemas se basa en una metodología, bien con «problemas estándar» (aplicación de una simple operación aritmética), bien con «problemas de proceso» (aplicación de unas estrategias o procedimientos distintos), o con ambas a la vez.

Con tal idea proponemos un análisis cuantitativo y cualitativo de todos los temas para comprobar:

1°. Cuántos problemas aparecen.

2°. Cuántos problemas requieren para su resolución la aplicación de una simple operación aritmética («problemas estándar»).

3°. Cuántos problemas requieren para su resolución la aplicación de unas estrategias o procedimientos distintos («problemas de proceso»).

4°. Las diferencias entre cursos en una misma editorial y la variedad entre editoriales.

Se han creado tres cuadros al efecto, uno por cada curso, y que aparecen en los ANEXOS como n° 10, 11 y 12.

En el cuadro n° 10 (Tercer curso), la Editorial 1 presenta mayor número de problemas en los temas «Medidas de masa» (22), «El tiempo» (22), «La resta» (20), «La multiplicación (2)» (19), «Otras divisiones» (19), «Medidas

de capacidad» (17) y «La división» (15). Hay seis temas con un solo problema y catorce temas con problemas estándar.

En la Editorial II los temas con mayor número de problemas son «La capacidad» (20), «Monedas y billetes» (14), «La sustracción» (12), «Ampliación de la multiplicación» (12), «La multiplicación» (10), y «El «tiempo» (10). Hay cuatro temas («El plano y sus elementos», «Los ángulos», «Los polígonos» y «Clasificamos los polígonos») sin problemas de tipo alguno.

La siguiente, Editorial III, en sólo siete lecciones presenta problemas de proceso. En tres de los temas de esta editorial, los denominados «Talleres de aplicación», se ampara un repertorio amplio de actividades, ejercicios y problemas de repaso sobre los seis temas anteriores. Aunque no se han computado como tales temas, los problemas sí aparecen contabilizados, fundamentalmente por el importante número de ellos que plantea (entre los tres, 34, siendo 7 de ellos de proceso). Del resto de lecciones destacan «Medidas de capacidad y masa» (17), «Medidas de dinero y tiempo» (15), «Práctica de la división» (14), «Sustracción de números naturales» (13), «División de números naturales» (10) y «Adición de números naturales» (10). Tres temas no presentan ningún problema («Ángulos», «Polígonos» y «Cuerpos geométricos»).

La Editorial IV la que menos temas presenta en este curso, elimina los problemas de seis lecciones. El tema «División de números naturales», con 29 problemas, es el que más presenta (6 de ellos de proceso). Le siguen «El sistema métrico decimal. Unidades de longitud» (10 de los 25 son de proceso), «Unidades de capacidad y de masa» (22), «Medida del tiempo» (7 de los 19 son de proceso) y «El dinero» (con 15, de los cuales 6 son de proceso).

La Editorial V presenta tres temas monográficos, de tipo repaso, no contabilizados en el total de las lecciones, pero con un número de problemas

a consi derar (11, 8 y 12, respectivamente). Además, al final del libro, existe un apartado recapitulativo, denominado «Ejercicios y problemas», donde encontramos hasta 64 problemas. Ya que el libro los distribuye por unidades, optamos por incorporarlos en el recuento de cada tema por separado, no considerando este apartado como algo independiente. El tema «Problemas de sumar y restar» es el que más problemas tiene (13). Luego le siguen «Divisiones (dividendo de dos cifras)» (12), «División de números naturales» (11), «Práctica de la división» (11), «Medidas de capacidad» (11) y «Resta de números naturales» (10).

En el libro de la Editorial VI existen tres apartados - que aparecen en tres temas - denominados «Actividades de repaso» con ejercicios y problemas. Sorprende cómo en algunas lecciones el número de problemas se dispara: «La medida del dinero» (51), «Las medidas de capacidad y de masa» (42), «La división (2)» (28), «Las medidas de longitud» (26), «La medida del tiempo» (25) y «La sustracción o resta» (21).

Como conclusión general extraemos cierta coincidencia en las editoriales en el tratamiento hacia el tema donde se aborda la «medida de capacidad», bien por separado o bien junto a la «medida de masa»; sistemáticamente todos los libros presentan un gran número de problemas en él, incluso en ocasiones superando a los temas tópicos de problemas, como son los de las cuatro operaciones básicas. Compárense datos en el cuadro 13 de los ANEXOS. Las iniciales «c» y «c/m» significan «capacidad» y «capacidad/masa», respectivamente, dependiendo de si el tratamiento del tema se hace o no por separado.

Por último señalar que de los seis libros pertenecientes a este curso, únicamente la Editorial 1 presenta problemas en todas las lecciones de su temario.

En el cuadro n° 11 (Cuarto curso) para la Editorial 1 los temas con mayor número de problemas son «Tiempo y precio» (23), «División de números

naturales (2)» (17), «Multiplicación de números decimales» (16), «Multiplicación de números naturales» (14) y «División de números naturales (1)» (14). Once temas sólo tienen un problema. Tres temas presentan problemas de proceso.

Los temas con mayor número de problemas en la Editorial II son «Masa» (16), «La división (1)» (10), «Capacidad» (10), «Adición y sustracción» (9) y «La división (2)» (9). Hay seis temas sin problemas y otros tres que, bajo la denominación de «Actividades de repaso», realizan cada seis temas una recopilación de ejercicios y problemas sobre la temática de éstos.

En la Editorial III los tres temas denominados «Talleres de aplicación» son de los que más problemas presentan (21, 14 y 14, respectivamente). De los demás, resaltar las lecciones de «Medidas de tiempo y de dinero» (17), «Práctica de la multiplicación» (11), «Propiedades de la multiplicación» (10) y «Práctica de la división» (10).

La Editorial IV al igual que en tercer curso, elimina los problemas en buena parte de su temario, y de las quince lecciones, solamente siete los plantean. Los temas con mayor número de ellos son «Unidades de capacidad y masa» (19), «Medida del tiempo. Precios» (17), «Números naturales. Operaciones: adición y sustracción» (16) y «El sistema métrico decimal. Unidades de longitud» (13). Si sumamos estas cantidades (65) y las comparamos con el total (85), comprobamos que estos temas acumulan buena parte de los problemas del libro.

La Editorial V monopoliza en sus «Monografías» (tres temas de tipo repaso con 14, 3 y 7 problemas, respectivamente) y en el apartado final de «Ejercicios y problemas» más de la mitad de los problemas del libro (93 de 140). No obstante, y siguiendo el criterio ya comentado para los libros del curso anterior, los problemas de este apartado final los consideramos incluidos en sus respectivas lecciones. La distribución del mayor número de problemas se realiza en las lecciones «Operaciones y problemas combinados»

(13), «Suma y resta de números naturales» (12), «Práctica de la división» (12) y «La división» (11). Hay ocho temas sin problemas.

Ya sucedió en el texto de tercer curso y acontece de nuevo en el de cuarto de la Editorial VI. La mayor parte de los problemas son del tipo estándar (99,02%). Las «Actividades de repaso» (después de los temas 6, 13 y 18) suponen un total de nueve problemas. Las lecciones con mayor número de problemas son «La división» (18), «Las medidas de tiempo. Las medidas de dinero» (14), «La multiplicación» (13), «La sustracción o resta» (12) y «La adición o suma» (11). Hay ocho temas sin problemas.

De los seis libros de cuarto curso, solamente dos presentan problemas en todas sus lecciones.

Los comentarios al cuadro n° 12 de los ANEXOS son los que argumentamos a continuación. Ya se comprobó en los libros de los cursos anteriores de la Editorial 1 la descompensación entre temas al plantear la «resolución de problemas». A pesar de que todos presentan problemas, hay diez con un solo problema, y de los 26, únicamente en siete encontramos problemas de proceso. Los temas con mayor número de problemas son «Operaciones con decimales» (28), «La capacidad» (28), «Propiedades de la división exacta» (20), «Área de figuras planas» (20) y «Propiedades de la división inexacta» (17).

En el libro de texto de la Editorial II seis temas no tienen problemas y sólo seis temas de los 22 llevan incorporados problemas de proceso. Los temas con un mayor número de problemas son «Sistema métrico decimal» (14), «Operaciones con cantidades de medidas (1)» (13), «Operaciones con cantidades de medidas (2)» (10), «Operaciones con números decimales (1)» (12), «Cálculo de áreas» (11) y «Medir el tiempo» (10).

En los tres temas denominados «Talleres de aplicación» de la Editorial III aparecen 13, 14 y 10 problemas, respectivamente. Del resto de lecciones

resaltar «División de números naturales» (20), «Cálculo de áreas» (20), «Medidas de superficie» (18), «Adición y sustracción de números naturales» (13), «Multiplicación y potencias» (13) y «Medidas de longitud» (13).

El libro de la Editorial 1V aumenta de forma espectacular el número de temas con respecto a cursos anteriores (15 temas en 3° e ídem para 4(1), lo que por otra parte no significa un incremento proporcional en el número de problemas (147 en 3°, 83 en 4° y 122 en 5°). En nueve temas desaparecen los problemas y exclusivamente dos lecciones presentan problemas de proceso. Los temas con mayor número de problemas son «Medidas de tiempo y de precio» (15), «Adición y sustracción de fracciones» (11), «Medidas de superficie» (11), «Suma y diferencia de números decimales» (10) y «Medidas de capacidad y de masa» (10).

Considerando en la Editorial V la distribución de los problemas del apartado final de «Ejercicios y problemas» en sus unidades correspondientes, el mayor número de ellos se hallan en «Suma y resta de números decimales» (13), «Medidas de longitud» (13), «Medidas de capacidad y de masa» (12) y «Suma y resta de fracciones (1)» (10). Las tres «Monografías» presentan 9, 7 y 8 problemas, respectivamente. En cinco temas no hallamos problemas.

En el texto de quinto de la Editorial VI, con respecto a los cursos anteriores, baja de forma apreciable el número de problemas tipo estándar. Las «actividades de repaso» (ubicadas en tres temas) suponen 10 problemas. Las lecciones con mayor número de problemas son «La división entera» (24), «Las medidas de tiempo. El sistema monetario» (20), «Las fracciones» (16), «Las medidas de longitud» (13), «Las medidas de capacidad. Las medidas de masa» (11) y «El área de algunas figuras planas» (10).

Una vez examinado por editoriales y cursos el tratamiento dado a la «resolución de problemas», es conveniente referir el número de problemas presentados en cada lección para resolver por los alumnos. Solamente así obtendremos una visión global de qué temas, editoriales y cursos encabezan

esta, digamos, «clasificación», y cuáles se quedan a la zaga. Es el cuadro n.° 14 de los ANEXOS.

En los veinticinco primeros puestos (hasta «con 19 problemas» inclusive) descubrimos dieciséis menciones a libros de tercer curso, dos a los de cuarto curso y siete a los de quinto curso. En cambio, en las dos últimas categorías («con 11 y 10 problemas») el panorama es algo más equitativo: ocho menciones a tercer curso, seis a cuarto curso y diez a quinto curso.

Con el fin de constatar qué temas de los programas oficiales son más ampliamente tratados en la «resolución de problemas», asignamos a cada intervalo un rango; así, al intervalo «51 problemas» se le concede el rango 20; al siguiente, «42 problemas», rango 19. Con tal procedimiento se llega al último intervalo «10 problemas» cuyo rango conferido es de 1. Este sería el resultado tras sumar los distintos rangos obtenidos por los temas:

-División 18 + 17 + 11 + 11 + 10 + 8 + 8 + 6 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1+ 1 = 113

-Capacidad y masa 19 + 13 + 10 + 8 + 3 + 2 + 1 = 56

-Tiempo y precio 14 + 11 + 8 + 8 + 6 + 6 = 53

-Longitud 16+ 15+4+4+4=43

-Tiempo 15+13+10+1=39

-Capacidad 17 + 11 + 8 + 1 = 37

-Sustracción o resta 12 + 11 + 4 + 3 + 3 + 1 = 34

-Dinero 20+6+5=31

-Áreas 11+11+2+1=25

-Multiplicación 10 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 = 24

-Operaciones con decimales 17 + 3 = 20

-Masa 13 + 7 = 20

-Adición y sustracción 7 + 4 + 4 = 15

-Superficie 9 + 2 = 11

-Fracciones 7 = 7

-Multiplicación de decimales 7 = 7

-Sistema métrico decimal 5 + 1 = 6

-Suma y resta de decimales 4 = 4

-Sistema métrico decimal. Unidades de longitud 4 = 4

-Adición y sustracción de fracciones 2 + 1 = 3

-Adición 1 = 1

Las editoriales destinan a los temas sobre la división, a los de las medidas (fundamentalmente las de capacidad y masa, ya sea por separado o conjuntamente) y a los temas dedicados al tiempo y dinero (tratados simultáneamente o por separado) un buen número de problemas.

Otra comparativa interesante es la de por cursos, que aparece en la siguiente tabla de los ANEXOS (n(1 15).

Observamos que salvo en una editorial, el curso de tercero presenta más problemas que el curso de cuarto. Todas coinciden en quinto curso en presentar más problemas que en el curso anterior. La comparación entre

tercero y quinto depara distintas situaciones: en cuatro editoriales tienen más problemas de tercero y, en dos, es quinto quien se lleva la palma.

Si en general la didáctica de las Matemáticas así lo indicara, o en particular la lógica se cifrara en conseguir graduar la dificultad según se avanza de curso, parece lógico desde tercero a quinto ir aumentando los problemas. Este requisito solamente lo cumpliría una editorial.

Por último, presentamos otra comparativa donde aparecen únicamente los porcentajes de problemas estándar y problemas de proceso que cada libro contiene (cuadro n° 16 de los ANEXOS).

Resulta enormemente esclarecedor comprobar la masiva acumulación de problemas donde predomina la aplicación de un algoritmo (problemas están(lar) sobre aquellos otros donde prima la presencia de otros tipos de estrategias de resolución (problemas de proceso).

La conclusión general sobre el tratamiento en los textos de la «resolución de problemas» es que no hay una distribución homogénea de los problemas en varios sentidos:

•En los tipos de problemas a resolver, estándar y de proceso, predominando los primeros sobre éstos.

•En el prorrateo lógico entre temas (mismo número de problemas para cada tema).

•En la equidad entre los cursos, siendo el tercer curso quien más problemas expone, después quinto y por último cuarto.

Capítulo 7

Conclusiones finales

Las pretensiones de este estudio comenzaron en lo que consideramos punto de inflexión, para nosotros de importancia capital, en el proceso de enseñanza y aprendizaje: el empleo del libro de texto en el aula.

Dos características fundamentales a destacar: por un lado la propensión exclusivista de su uso en detrimento de otros materiales curriculares; por otro, la forma en la que determina la relación docente/discente.

Estas dos conclusiones se constituyen en importantes reflexiones que, directa o indirectamente, harán variar la óptica del tratamiento transferido a ciertos aspectos relacionados con el diseño de los libros de texto, entendido en su más amplio sentido.

Comentar las aportaciones que, con toda modestia y sin ningún tipo de pretensiones, creemos posee este estudio, sobre todo desde la vertiente de su importancia práctica, implicación didáctica y por sus posibles derivaciones educativas, y glosar las dificultades que ha entrañado la investigación es punto obligado para la reflexión de estudiantes y estudiosos de esta temática.

Acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, descubrir la importancia del aspecto formal y abstracto de esta ciencia, de su naturaleza jerarquizada (donde unos conceptos se articulan en otros) y de su poder para hacer trabajar la mente.

Si bien el inicio de la construcción matemática se formula en términos de situaciones concretas, la comprensión matemática supone una capacidad específica de reconocer y usar un concepto matemático en contextos distintos.

La aplicabilidad de esta ciencia es inmensa y no debe estancarse en brindar habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida; debe buscar la formación intelectual y su adaptación a un extenso campo de actividades cotidianas más o menos complejas.

Centrados en las Matemáticas elementales, pretendemos incardinar su enseñanza dentro de un proceso de instrucción donde prevalezca, en un primer momento, la intuición para progresivamente acercarse a la deducción. Además, ha de conseguirse el fortalecimiento entre pensamiento lógico y razonamiento matemático, con objeto de lograr en los alumnos la ansiada autonomía expresada en el eslogan «enseñar a pensar». Por tanto, han de considerarse las modificaciones cognitivas de estos períodos y concebir una didáctica acorde con tales cambios.

Es importante reflejar, en los contenidos matemáticos, una serie de elementos y tipos de aprendizaje específicos que avalen un dominio completo de esta ciencia y que se engloban en dos dimensiones. La primera de ellas consiste en los cuerpos organizados de conocimiento (datos de la memoria, conocimiento figurativo, conocimiento proposicional); la segunda son los procesos metodológicos implicados en las nuevas adquisiciones que permitirán aumentar el bagaje cognitivo y su posible aplicación a situaciones diferentes (algoritmos, estrategias específicas).

De lo expuesto en los cuatro tipos de aprendizaje matemáticos, entresacar escuetamente las siguientes consecuencias:

-La memorización no puede basarse en la simple repetición mecánica, hecho evitable si se organizan los conceptos mediante una interrelación lógica entre ellos.

-El aprendizaje algorítmico requiere de la memoria - entendida ésta en su faceta más operativa - para interpretar el procedimiento correcto.

-El aprendizaje de conceptos debe basarse en la propia jerarquización que imponen las Matemáticas como ciencia y, además, atacarlos mediante ejemplos, sin duda la mejor ayuda en el abordaje de una definición matemática.

-La resolución de problemas es una modalidad de aprendizaje cuyo auge en los últimos tiempos ha resultado espectacular... aunque bien es cierto que no en el sentido deseado. Como proceso donde se combinan distintos elementos, el problema es cuestión que precisa creatividad. Ahora bien, si se peca de excesivos problemas de aplicación de algoritmos, la resolución de problemas se convierte en algo mecánico y rutinario, donde una vez aprendido cómo hacer el primero se resuelven los restantes. Por eso la incorporación de problemas donde evoquen, para su respuesta, estrategias y procedimientos que promuevan la discusión y el desarrollo de actitudes positivas.

Lo mencionado hasta el momento, nos conduce a la reflexión sobre cómo interpretar el proceso didáctico de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas. De entrada asumir dos principios básicos que, compendiados en uno, vienen a decir que los conceptos de orden superior es mejor enseñarlos con ejemplos, que no son otros conceptos que los ya formados en la estructura cognitiva de quien aprende. La consumación de una buena enseñanza y de un mejor aprendizaje se consigue siempre que posibilitemos a cada alumno desplegar su comprensión y sus destrezas para las Matemáticas, considerando ciertos factores: variabilidad de contenidos, tiempo dedicado a cada uno de ellos, secuencias de potenciación, grupos reducidos, estrategias de enseñanza apropiadas y, por último, consideración a las diferencias individuales.

Por último comentar la retrospección histórica de las Matemáticas que ilustraron las últimas reformas programáticas. Es imprescindible referirse a la «Matemática Moderna», concepción pretenciosa de las Matemáticas fundada en un lenguaje y fundamentación innovadora. En nuestro país las causas más

«siniestras» de su aplicación fueron la preponderancia del rigor lógico, en detrimento de aspectos más operativos y manipulativos, y centrarse en el álgebra dejando de lado la geometría. De su incidencia en las reformas curriculares acometidas durante los sesenta-setenta, recoger las palabras de Popkewitz, reconociendo que nunca se llegaron a implantar como se deseó en un principio.

En la década de los setenta se poseía una concepción estructuralista y formalista, muy de moda por aquel entonces. Consideraban que la función primordial era basar la enseñanza de las Matemáticas en la matematización de problemas, la creación de sistemas formales y la utilización de leyes para la interpretación de éstos. Otra de las críticas advertidas sobre ellas son la formulación de los objetivos en términos demasiado al estilo conductista. Sobre los objetivos específicos del área de Matemáticas manifestar, desde esta concepción, el predominio del área cognoscitiva sobre los dominios afectivo y psicomotor.

Se ha reconocido que a la implantación de aquella reforma no le siguió la consecuente evaluación para detectar posibles fallos. En cambio, sí se han identificado algunas deficiencias que intervinieron de manera decisiva en la caída de estos programas, como por ejemplo la utilización de los libros de forma dogmática, o la pésima preparación de los docentes para una Matemática «moderna» que requería reactualización, no sólo conceptual, sino también metodológica.

De todas formas la inconsistencia de estos programas y el progreso didáctico consiguiente pronto se dejó notar con la contrarreforma de los ochenta. Se estructura la educación básica en tres ciclos, superando la división anterior de etapas, y se diseñan las áreas en una disposición más acorde con la demanda educativa. Estos programas, centrados en un modelo sistemático recurrente a la pedagogía por objetivos, dirigen sus esfuerzos en el área de las Matemáticas a la organización de las estructuras mentales, a la

construcción de conceptos básicos y a la adquisición de unos automatismos operativos. Estas pretensiones se diluyen al realizar la valoración de los programas oficiales: excesivos objetivos mínimos y jerarquización poco precisa de los mismos; desconexión de los Niveles Básicos de Referencia de la realidad del alumno; no hay coherencia entre los contenidos y la metodología. En cuanto a los resultados sobre rendimiento académico, nada más concluyente que los siguientes porcentajes: el 75% de objetivos superados lo alcanza un cortísimo 25% de alumnos. El dictamen sobre estos programas oficiales se basa en las siguientes afirmaciones: inadecuados para el desarrollo de los alumnos de 6 a 11 años; los objetivos se caracterizan por una formulación ambigua y una determinación excesivamente mecanicista; el tipo de aprendizaje matemático de resolución de problemas se halla muy desatendi do. Una de las causas en la inmoderada dependencia de los docentes a los libros de texto.

Esta subordinación a los textos estaría más que justificada si halláramos en ellos garantías absolutas de una adecuada preparación didáctica, pedagógica y hasta tipográfica. A pesar de la regulación legal que sufren, el libro de texto coarta la libertad del currículo y, por ende, el desarrollo normal del proceso de enseñanza-aprendizaje. No han de omitirse las ventajas que posee como recurso para profesores y alumnos: organiza la metodología de aquél y ayuda al dominio de técnicas instrumentales de éste. Pero si se abusa de él, puede convertirse en polarizador absoluto del proceso instructivo con una incidencia negativa puesto que, entre otras cosas, ignora los conocimientos previos y uniformiza el ritmo del aprendizaje, inhibiendo así la iniciativa de los alumnos.

La sumisión a los libros de texto es un factor que inexorablemente llega a descontextualizar la labor docente, porque la metodología y la didáctica propia del profesor se privan de una serie de elementos importantísimos en el desempeño de la enseñanza de las Matemáticas. Estos son:

-El conocimiento de los procesos de investigación matemática y su aplicación en el aula. Un profesor que se precie debe encontrarse al día de tales hechos y nada mejor que la lectura de revistas especializadas o de libros de reciente publicación.

-El conocimiento de los estados psicológicos de aprendizaje y su aplicación para la resolución de problemas. La psicología evolutiva y la didáctica de las Matemáticas son excelentes fuentes para tal menester.

-El conocimiento de los distintos modelos de enseñanza/aprendizaje y elección de aquel modelo que más se conforme a las características de los alumnos. De nuevo se hace imprescindible la lectura especializada y más novedosa sobre temas matemáticos.

-El tratamiento informático y la elaboración de distintos recursos. Las Matemáticas necesitan algo más que un encerado, un ábaco o una calculadora.

Sin duda estos elementos no pueden ser activados desde el propio libro como soporte físico; tampoco lo es el establecimiento de la vía más favorable para facilitar el aprendizaje, o la homogeneización de objetivos y contenidos dirigidos a alumnos con distintos estilos cognitivos.

Los modelos de diseño y elaboración de material impreso de enseñanza poseen campo propio de actuación debido, sobre todo, a la aparición de nuevas tecnologías en la enseñanza y a la creación de nuevos soportes de información. Este es el campo de acción de la «tecnología del texto», entendida como proceso basado en las teorías e investigación del aprendizaje y comunicación para producir productos de enseñanza. Esta tecnología se basa en la secuencia, estructura, diseño y composición de los materiales impresos de enseñanza como instrumentos fiables y validados que posibiliten alcanzar los objetivos de la instrucción. Sin embargo, la mayoría de los especialistas admiten desconocer el funcionamiento y potencial impacto que

el material escrito pueda ejercer sobre el aprendizaje, quizá por la falta de investigaciones sobre el tema.

En cuanto a los contenidos curriculares, la definición más técnica se ajusta a la de conjunto de teorías, principios, hechos, relaciones y datos que interpretan y explican la realidad. En otros tiempos se identificaron con los conceptos, de forma que se basaba su aprendizaje en una metodología amparada en lo memorístico.

La elaboración cada vez más científica de la didáctica, ha permitido configurar una serie de condiciones o criterios para la selección y organización de los contenidos. La importancia de su aplicación estriba en conseguir una significación didáctica y pedagógica de los contenidos basada en una organización formal del conocimiento científico.

CONCLUSIONES SOBRE LA TRANSFERENCIA DE LOS PROGRAMAS OFICIALES A LOS LIBROS DE TEXTO

No existe «operacionalización» alguna de los **principios del aprendizaje en los libros** de texto, lo que implica: 1°, que los libros no han seguido el programa oficial como por ley deben hacer; 2°, que el programa oficial carece de una fundamentación lógica en los principios del aprendizaje.	Comoquiera que la información recogida en el programa oficial resulta dispersa y hasta confusa, es **difícil** asentir **que la transferencia de contenidos y objetivos** desde aquél a los libros de texto, aun realizada con los mejores própositos, **pueda alcanzar los fines propuestos**.
La **ausencia** de un **tratamiento específico y sistemático de los cuatro tipos de aprendizaje matemáticos** se debe a la **carencia mostrada por los propios programas oficiales** en tan puntual aspecto.	El **contenido elegido no se ajusta a las características más adecuadas para un desarrollo integral**, sobre todo por falta de una formulación de objetivos óptima.
La **secuencia temática** exhibida en los programas oficiales es **ignorada** de forma arbitraria **por** la mayoría de los **libros**.	El **39,64%** de los **objetivos «oficiales» no aparece en los libros** de texto.
La **coherencia lógica** que debiera existir **entre objetivos didácticos y contenidos** a impartir para alcanzar aquéllos, **no se produce**.	**Los objetivos no cubren paritariamente los tres dominios** (cognoscitivo, afectivo y psicomotor).
No hay formulación correcta de objetivos por no seguir las especificaciones técnicas.	

En general:

La transferencia de contenidos y objetivos didácticos del área de las Matemáticas desde los programas oficiales a los libros de texto de los cursos de tercero, cuarto y quinto no se ajusta a unos principios metodológicos de instrucción coherentes.

7.1 Importancia práctica e implicación general del estudio

Cuando un profesor inicia un curso y el libro de texto que se le asigna es nuevo para él, la situación creada resulta cuando menos incómoda. ¿Cuántos de nosotros, en tales circunstancias, sentimos la necesidad de «valoran> el libro de texto? Probablemente todos, pero no lo hacemos de una forma

sistemática. Comenzamos el curso y según vamos explicando temas y realizando ejercicios, caemos en la cuenta de que por unas razones determinadas, el texto no se ajusta a nuestra metodología ni a los alumnos a quienes impartimos clases. ¿Qué hacer? Dejar transcurrir el tiempo estipulado por ley y cambiar el libro, eso sí, guiados por unos criterios totalmente arbitrarios.

De este argumento introductorio extraemos una deducción: la cuidada preparación del profesorado para actuar en cualquier faceta de su labor docente.

Si necesitamos una buena formación en psicología y pedagogía para ser tutor de unos alumnos y poder enfrentarnos a problemáticas que afectan al rendimiento escolar; si necesitamos dominar la didáctica de unas determinadas asignaturas... ¿por qué no va a ser tan importante el conocimiento de pautas y criterios objetivos que nos faculten en el discernimiento de un buen texto de otro que no lo es? Es más... ¿por qué no estar preparados para diseñar nuestros propios materiales curriculares?

La propuesta, así a bote pronto - permítasenos el término deportivo-, podría parecer descabellada, pero a la luz de los argumentos manifestados, está más que justificada. Se ha demostrado la dificultad de hallar un libro de texto que reúna, de forma adecuada y pertinente, todas aquellas características que harían de él un excelente instrumento para ser empleado en el proceso de instrucción. La situación ideal, costosísima en esfuerzo humano, resultaría de un desempeño peculiar por parte de los profesores: preparar, para su grupo de alumnos, un material curricular muy específico, que considerará a priori el nivel de desarrollo operatorio, la fase evolutiva y los conocimientos previos de sus alumnos. De todos es sabido dónde acaban en educación las situaciones ideales, o las que sin serlo suponen desplegar una gran actividad, diligencia y denuedo por parte de los docentes.

Entonces... ¿qué? Recomendamos, y es la implicación general del presente

estudio, analizar los libros de texto de forma responsable, objetiva, sistemática y no arbitraria. Bucear en la bibliografía más actual para conseguir un instrumento de valoración, sencillo de aplicar e interpretar, y ejecutarlo sobre los textos con el fin de validar nuestro comportamiento de cara a tan fundamental elemento del proceso de enseñanza/aprendizaje.

Derivaciones educativas 7.2

-Todo libro de texto ha de estar respaldado por unos principios del aprendizaje que por una parte sustenten con validez probada sus contenidos y, por otra, guíen de forma eficaz el proceso de instrucción.

-Los objetivos deben cumplir los criterios de formulación especificados al efecto, cubrir en la misma proporción los dominios cognoscitivo, afectivo y psicomotor y ser explícitos en el proceso de instrucción.

-La concreción en los libros de texto del «nivel de desarrollo operatorio» es realmente complicada. La consecuencia más inmediata de tal dificultad es suplir al libro en ciertos momentos del proceso de instrucción; la mejor alternativa son los materiales curriculares diseñados en función de las peculiaridades de los alumnos.

-La adopción de un libro de texto requiere un proceso formal, sistemático y objetivo de análisis y estudio. De idéntica forma debe actuarse con la concreción de los materiales curriculares que se diseñen por el docente.

-Un currículo planteado con carácter abierto puede llegar a cerrarse en función del uso que de él se haga.

No entendemos la postura de consentir libros que no se ajustan a los programas oficiales vigentes (aunque en ocasiones tal actitud esté más que justificada). Si eso ocurre, es el momento de proceder desde la administración para reformar, si no mediante ley, al menos con

disposiciones legales de menor rango que estén siempre por delante de las actuaciones de las editoriales.

-Los programas oficiales han de asumir como función muy precisa la de orientar al profesorado en la práctica educativa. Esta responsabilidad requiere:

- •No precipitarse en su confección y posterior publicidad y divulgación.
- •Experimentación previa antes de implantarse en el correspondiente nivel de enseñanza.
- •Evaluación formal tras el proceso experimental y análisis de los resultados.

-El aprendizaje matemático demanda una metodología precisa donde uno de sus pilares básicos es la resolución de problemas, entendida como aplicación de distintos tipos de estrategias. También es importante la presencia de temas transversales y partir de ejemplos y experiencias concretas de la vida real.

7.3 Datos de interés para el estudio (anexos)

N° 1 SUPERÁVIT DE TEMAS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS CON RESPECTO A LOS PROGRAMAS OFICIALES

EDITORIAL	CURSO	Nº TEMAS	SUPERÁVIT TEMAS RESPECTO A P.O.
I	3º 4º 5º	21 26 26	13 15 14
II	3º 4º 5º	18 18 22	10 7 10
III	3º 4º 5º	19 19 19	11 8 7
IV	3º 4º 5º	15 15 15	7 4 13
V	3º 4º 5º	22 22 22	14 11 10
VI	3º 4º 5º	18 18 18	10 7 6

N° 2 DESDOBLAMIENTO DE TEMAS EN 30

CURSO: 3º	BLOQUES TEMÁTICOS								TOTAL TEMAS
	1		2		3		4		
TEMA PROGR. OFICIALES	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	8
Editorial I	3	1	3	8	4	2	0	0	21
Editorial II	0	0	2	6	3	2	2	3	18
Editorial III	1	0	3	7	2	1	4	1	19
Editorial IV	1	1	1	3	2	2	4	1	15
Editorial V	2	0	2	9	3	1	4	1	22
Editorial VI	1	1	2	6	2	2	3	1	18

N° 3 DESDOBLAMIENTO DE TEMAS EN 4°

CURSO: 4º	BLOQUES TEMÁTICOS											TOTAL TEMAS
	1		2			3		4				
TEMA PROGR. OFICIALES	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	4.4	11
Editorial I	2	1	2	4	4	3	1	7	1	0	1	26
Editorial II	0	0	2	4	1	3	0	5	0	2		17
Editorial III	1	0	2	5	2	2	1	5	0	0	1	19
Editorial IV	1	1	1	2	2	2	1	3	1	1		15
Editorial V	1	0	2	5	4	2	1	5	1	1		22
Editorial VI	1	1	2	4	2	2	1	3	0	1	1	18

N° 4 DESDOBLAMIENTO DE TEMAS EN 5°

CURSO: 5º	BLOQUES TEMÁTICOS												TOTAL TEMAS
	1		2			3			4				
TEMA PROGR. OFICIALES	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	4.4	12
Editorial I	2	1	1	3	3	3	1	2	6	1	1	2	26
Editorial II	0	0	1	2	6	3	1	1	3	1	1	2	21
Editorial III	1	0	0	3	4	2	1	1	4	1	1	1	19
Editorial IV	2	1	2	4	6	2	1	1	4	1	0	2	26
Editorial V	1	0	1	4	7	2	0	1	3	1	1	1	22
Editorial VI	1	1	1	4	2	2	1	1	2	1	1	1	18

N° 5 «ITINERARIO TEMÁTICO» LOCALIZADO EN EL ÍNDICE DE LOS LIBROS DE LA MUESTRA

Editorial I 3º

1.1 → 1.2 → 2.1 → 2.2 → 3.1 → 3.2

Editorial I 4º

1.1 → 1.2 2 → 1 2.2 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.2 → 4.4

Editorial I 5º

1.1 → 1.2 → 2.1 → 2.2 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 3.3 → 4.3 → 4.1 → 4.2 → 4.4

Editorial II 3º

2.1 → 4.1 → 2.2 → 3.2 → 3.1 → 4.1 → 2.2 → 3.1 → 4.1

Editorial II 4º

2.1 → 4.1 → 2.2 → 3.1 → 4.1 → 2.3 → 3.1 → 4.1 → 4.3

Editorial II 5º

2.1 → 2.2 → 3.2 → 4.1 → 4.2 → 2.3 → 4.1 → 2.3 → 4.1 → 3.1 → 4.4 → 2.2 → 3.3 → 4.3

Editorial III 3º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 4.1 → 2.2 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.2

Editorial III 4º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 4.1 → 2.2 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.4

Editorial III 5º

1.1 → 2.2 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 3.3 → 4.3 → 4.1 → 4.4 → 4.2

Editorial IV 3º

1.1 → 1.2 → 2.1 → 2.2 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.2

Editorial IV 4º

1.1 → 1.2 → 2.1 → 2.2 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.2 → 4.3 → 4.4

Editorial IV 5º

1.1 → 1.2 → 2.1 → 2.2 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 3.3 → 4.1 → 4.2 → 4.4

Editorial V 3º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 4.1 → 2.2 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.2

Editorial V 4º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 4.1 → 2.3 → 3.1 → 3.2 → 4.2 → 4.4

Editorial V 5º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 4.1 → 2.3 → 3.1 → 4.1 → 3.3 → 4.3 → 4.2 → 4.4

Editorial VI 3º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 1.2 → 3.2 → 3.1 → 4.1 → 4.2

Editorial VI 4º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 2.3 → 1.2 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.3 → 4.4

Editorial VI 5º

1.1 → 2.1 → 2.2 → 2.3 → 1.2 → 3.1 → 3.2 → 4.1 → 4.2 → 4.1 → 3.3 → 4.3 → 4.4

N° 6 IDONEIDAD ENTRE LA SECUENCIA TEMÁTICA DE LOS PROGRAMAS OFICIALES Y LAS EDITORIALES

	SECUENCIA TEMÁTICA											
	CONCORDANTE						NO CONCORDANTE					
	COMPLETA			INCOMPLETA			COMPLETA			INCOMPLETA		
EDITORIAL / CURSO	3º	4º	5º	3º	4º	5º	3º	4º	5º	3º	4º	5º
Editorial I				X	X				X			
Editorial II										X	X	X
Editorial III										X	X	X
Editorial IV	X	X										X
Editorial V										X	X	X
Editorial VI							X		X		X	

N° 7 TRATAMIENTO DE LOS CUATRO TIPOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN LOS LIBROS DEL TERCER CURSO

Editorial	**I**		**II**		**III**		**IV**		**V**		**VI**	
Condición*	**1ª**	**2ª**	**1ª**	**2ª**	**1ª**	**2ª**	**1ª**	**2ª**	**1ª**	**2ª**	**1ª**	**2ª**
Memorización	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A. algorítmico	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
R. de problemas	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A. de conceptos	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ

Las dos condiciones vienen explicadas en páginas 76 y 77.

N° 8 TRATAMIENTO DE LOS CUATRO TIPOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN LOS LIBROS DEL CUARTO CURSO

Editorial	I		II		III		IV		V		VI	
Condición	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
Memorización	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A. algorítmico	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
R. de problemas	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A. de conceptos	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ

N° 9 TRATAMIENTO DE LOS CUATRO TIPOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN LOS LIBROS DEL QUINTO CURSO

Editorial	I		II		III		IV		V		VI	
Condición	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
Memorización	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A. algorítmico	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
R. de problemas	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
A. de conceptos	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO	SÍ	SÍ

N° 10 TRATAMIENTO DE LA «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS» EN LOS LIBROS DE TERCER CURSO

Editorial	Nº de temas	Temas con problemas	Nº de problemas	Problemas Estándar	Problemas de Proceso
I	21	21	211	183	28
II	18	14	157	137	20
III	19	16	156	141	15
IV	15	9	147	112	35
V	22	15	157	147	10
VI	18	12	240	238	2

N° 11 TRATAMIENTO DE LA «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS» EN LOS LIBROS DE CUARTO CURSO

Editorial	Nº de temas	Temas con problemas	Nº de problemas	Problemas Estándar	Problemas de Proceso
I	26	26	180	176	4
II	18	12	100	83	17
III	19	19	197	187	10
IV	15	7	83	79	4
V	22	14	140	135	5
VI	18	10	103	102	1

N° 12 TRATAMIENTO DE LA «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS» EN LOS LIBROS DE QUINTO CURSO

Editorial	Nº de temas	Temas con problemas	Nº de problemas	Problemas Estándar	Problemas de Proceso
I	26	26	226	205	21
II	22	18	138	122	16
III	19	17	236	220	16
IV	25	16	122	118	4
V	22	16	148	139	9
VI	18	14	143	132	11

N° 13 COMPARATIVA ENTRE N° MÁXIMO DE PROBLEMAS APARECIDOS EN UNA LECCIÓN Y EL N° DE PROBLEMAS SOBRE CAPACIDAD Y/O MASA

Editorial	Nº problemas máximo aparecido en una lección	Problemas sobre medidas de capacidad y/o masa	C	C / M
I	22	17	X	
II	20	20	X	
III	22	17		X
IV	29	22		X
V	9	5	X	
VI	51	42		X

N° 14 CLASIFICACIÓN DE LECCIONES SEGÚN N° DE PROBLEMAS

Nº de problemas (Rango)	Editorial	Curso	Lección
Con 51 (20).-	VI	3º	«La medida del dinero»
Con 42 (19).-	VI	3º	«Las medidas de capacidad y de masa»
Con 29 (18).-	IV	3º	«División de números naturales»
Con 28 (17).-	VI I I	3º 5º 5º	«La división (2)» «Operaciones con decimales» «La capacidad»
Con 26 (16).-	VI	3º	«Las medidas de longitud»
Con 25 (15).-	IV VI	3º 3º	«El sistema métrico decimal» «Unidades de longitud» «La medida del tiempo»
Con 23 (14).-	I	4º	«Tiempo y precio»
Con 22 (13).-	I I IV	3º 3º 3º	«Medidas de masa» «El tiempo» «Unidades de capacidad y de masa»
Con 21 (12).-	VI	3º	«La sustracción o resta»
Con 20 (11).-	I II I I III III VI	3º 3º 5º 5º 5º 5º 5º	«La resta» «La capacidad» «Propiedades de la división exacta» «Área de figuras planas» «División de números naturales» «Cálculo de áreas» «Las medidas de tiempo» «El sistema monetario»
Con 19 (10).-	I I IV IV	3º 3º 3º 4º	«La multiplicación (2)» «Otras divisiones» «Medida del tiempo» «Unidades de capacidad y masa»
Con 18 (9).-	III	5º	«Medidas de superficie» (18)
Con 17 (8).-	I III I III IV I	3º 3º 4º 4º 4º 5º	«Medidas de capacidad» «Medidas de capacidad y masa» «División de números naturales (2)» «Medidas de tiempo y de dinero» «Medida del tiempo. Precios» «Propiedades de la división inexacta»

Con 16 (7).-	I	4º	«Multiplicación de números decimales»
	II	4º	«Masa»
	IV	4º	«Números naturales. Operaciones: adición y sustracción»
	VI	5º	«Las fracciones»
Con 15 (6).-	I	3º	«La división»
	III	3º	«Medidas de dinero y tiempo»
	IV	3º	«El dinero»
	IV	5º	«Medidas de tiempo y de precio»
Con 14 (5).-	II	3º	«Monedas y billetes»
	III	3º	«Práctica de la división»
	I	4º	«Multiplicación de números naturales»
	I	4º	«División de números naturales (1)»
	II	5º	«Sistema métrico decimal»
Con 13 (4).-	III	3º	«Sustracción de números naturales»
	V	3º	«Problemas de sumar y restar»
	IV	4º	«El sistema métrico decimal. Unidades de longitud»
	V	4º	«Operaciones y problemas combinados»
	II	5º	«Operaciones con cantidades de medidas (1)»
	III	5º	«Adición y sustracción de números naturales»
	III	5º	«Multiplicación y potencias»
	III	5º	«Medidas de longitud»
	V	5º	«Suma y resta de números decimales»
	V	5º	«Medidas de longitud»
	VI	5º	«Las medidas de longitud»
Con 12 (3).-	II	3º	«La sustracción»
	II	3º	«Ampliación de la multiplicación»
	V	3º	«Divisiones (dividendo de dos cifras)»
	V	3º	«Divisiones (dividendo de dos cifras)»
	V	4º	«Suma y resta de números naturales»
	V	4º	«Práctica de la división»
	II	5º	«Operaciones con números decimales (1)»
	V	5º	«Medidas de capacidad y de masa»
Con 11 (2).-	V	3º	«División de números naturales»
	V	3º	«Práctica de la división»
	V	3º	«Medidas de capacidad»
	III	4º	«Práctica de la multiplicación»
	V	4º	«La división»
	II	5º	«Cálculo de áreas»
	IV	5º	«Adición y sustracción de fracciones»
	IV	5º	«Medidas de superficie»
	VI	5º	«Las medidas de capacidad» «Las medidas de masa»

Con 10 (1).-	II	3º	«La multiplicación»
	II	3º	«El tiempo»
	III	3º	«División de números naturales»
	III	3º	«Adición de números naturales»
	V	3º	«Resta de números naturales»
	II	4º	«La división (1)»
	II	4º	«Capacidad»
	III	4º	«Propiedades de la multiplicación»
	II	5º	«Operaciones con cantidades de medidas (2)»
	II	5º	«Medir el tiempo»
	IV	5º	«Suma y diferencia de números decimales»
	IV	5º	«Medidas de capacidad y de masa»
	V	5º	«Suma y resta de fracciones (1)»
	VI	5º	«El área de algunas figuras planas»

N° 15 COMPARATIVA POR CURSOS DE LA «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS»

Editorial	Tercer curso	Cuarto curso	Quinto curso
I	211	180	226
II	157	100	138
III	156	197	236
IV	147	83	122
V	157	140	148
VI	240	103	143

N° 16 PORCENTAJES DE PROBLEMAS «ESTÁNDAR» Y «DE PROCESO» EN LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS

Editorial	Curso	P. Estándar	P. de Proceso
I	3º	86,77	13,23
	4º	97,77	2,23
	5º	90,70	9,30
II	3º	87,34	12,66
	4º	83,00	17,00
	5º	88,40	11,60
III	3º	90,38	9,62
	4º	94,91	5,09
	5º	93,22	6,78
IV	3º	76,18	23,82
	4º	95,18	4,82
	5º	96,72	3,28
V	3º	92,66	7,34
	4º	96,50	3,50
	5º	95,30	4,70
VI	3º	99,16	0,84
	4º	99,02	0,98
	5º	92,30	7,70

RESUMEN POR EDITORIALES

Editorial I
No cumple sistemáticamente con la operacionalización de los principios del aprendizaje.
En el tratamiento de los cuatro tipos de aprendizaje, actúa correctamente en «Memorización» y «Aprendizaje algorítmico», podría mejorar en «Resolución de problemas» y no presenta convenientemente el «Aprendizaje de conceptos».
Puede presumir de mostrar problemas en todos los temas de sus tres libros, exactamente 617, de los que el 91,74% son «estándar» y el 8,26% «de proceso».
Aparición de objetivos de los programas oficiales: en 3º, 41,17%; en 4º, 80,48%; en 5º, 74,47%.
Prevalece el ámbito cognoscitivo sobre el psicomotor y el afectivo.
Objetivos que no aparecen: 3º: 58,83% / 4º: 19,52% / 5º: 25,53%.
Introduce ejercicios y/o actividades acto seguido a los contenidos.
Todas las lecciones contienen ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.
No todas las operaciones aritméticas se reflejan por igual en los ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.

Editorial II
No cumple sistemáticamente con la operacionalización de los principios del aprendizaje, salvo uno, el referente al carácter lúdico en la presentación de conceptos.
Salvo el «Aprendizaje de conceptos», el tratamiento del resto no es óptimo. «Memorización» y «Resolución de problemas» no se atienden y «Aprendizaje algorítmico» únicamente en 5º.
395 problemas para los tres cursos: 13,75% «de proceso» y 86,25% tipo «estándar».
Aparición de objetivos de los programas oficiales: en 3º, 45,09%; en 4º, 41,46%; en 5º, 42,55%.
Prevalece el ámbito cognoscitivo sobre el psicomotor y el afectivo.
Objetivos que no aparecen: 3º: 44,91% / 4º: 59,54% / 5º: 57,45%.
Introduce ejercicios y/o actividades acto seguido a los contenidos.
No todas las lecciones contienen ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.
No todas las operaciones aritméticas se reflejan por igual en los ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.

Editorial III
No cumple sistemáticamente con la operacionalización de los principios del aprendizaje.
Sistemática en todos los cursos: no contempla «Memorización» ni «Resolución de problemas» y sí «Aprendizaje algorítmico» y «Aprendizaje de conceptos».
El libro de 4º tiene en todas sus lecciones problemas. Para los tres cursos dedica un total de 589 problemas, el 92,84% son «estándar» y el resto, 7,16%, «de proceso».
Aparición de objetivos de los programas oficiales: en 3º, 70,58%; en 4º, 58,53%; en 5º, 63,82%.
Prevalece el ámbito cognoscitivo sobre el psicomotor y el afectivo, en este orden.
Objetivos que no aparecen: 3º: 29,42% / 4º: 41,46% / 5º: 36,18%.
Introduce ejercicios y/o actividades acto seguido a los contenidos.
Todas las lecciones contienen ejercicios de cálculo, pero no todas presentan ejercicios de resolución de problemas.
No todas las operaciones aritméticas se reflejan por igual en los ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.

Editorial IV
No cumple sistemáticamente con la operacionalización de los principios del aprendizaje.
Ninguno de los cuatro tipos de aprendizaje se considera de forma conveniente.
Escaso el número de problemas de esta editorial: 352. De ellos, el 10,64% son «de proceso» y el 89,36%, «estándar». Destaca el hecho de que una tercera parte de los problemas de tercer curso son del tipo problema «de proceso».
Aparición de objetivos de los programas oficiales: en 3º, 78,43%; en 4º, 80,48%; en 5º, 68,08%.
Prevalece el ámbito cognoscitivo sobre el psicomotor y el afectivo.
Objetivos que no aparecen: 3º: 21,57% / 4º: 19,52% / 5º: 31,92%.
No introduce ejercicios y/o actividades acto seguido a los contenidos.
No todas las lecciones contienen ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.
No todas las operaciones aritméticas se reflejan por igual en los ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.

Editorial V
No cumple sistemáticamente con la operacionalización de los principios del aprendizaje.
Solamente el «Aprendizaje algorítmico» es considerado de forma idónea.
De 319 problemas, el 5,18% son «de proceso» y el 94,82% tipo «estándar».
Aparición de objetivos de los programas oficiales: en 3º, 47,05%; en 4º, 58,53%; en 5º, 42,55%.
Prevalece el ámbito cognoscitivo sobre el psicomotor y el afectivo.
Objetivos que no aparecen: 3º: 52,95% / 4º: 41,46% / 5º: 57,45%.
No introduce ejercicios y/o actividades acto seguido a los contenidos.
No todas las lecciones contienen ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.
No todas las operaciones aritméticas se reflejan por igual en los ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.

Editorial VI
No cumple sistemáticamente con la operacionalización de los principios del aprendizaje.
No contempla «Memorización» ni «Resolución de problemas», y sí «Aprendizaje algorítmico» y «Aprendizaje de conceptos».
El número de problemas a lo largo de los tres cursos es de 486. El 96,82% son problemas «estándar» y el 3,18% «de proceso».
Aparición de objetivos de los programas oficiales: en 3º, 56,86%; en 4º, 63,41%; en 5º, 63,82%.
Prevalece el ámbito cognoscitivo sobre el psicomotor y el afectivo..
Objetivos que no aparecen: 3º: 43,14% / 4º: 36,59% / 5º: 36,18%.
Introduce ejercicios y/o actividades acto seguido a los contenidos.
Todas las lecciones contienen ejercicios de cálculo, pero no todas presentan ejercicios de resolución de problemas.
No todas las operaciones aritméticas se reflejan por igual en los ejercicios de cálculo y de resolución de problemas.

Bibliografía

ABRANTES, P. (1996): «El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8, 7-18.

AIZPUN LÓPEZ, A. (1971): Teoría y didáctica de la Matemática actual. Barcelona: Vicens Vives.

AIZPUN LÓPEZ, A. (1983a): Matemática. Diccionario de Ciencias de la Educación (pp. 910-911). Madrid: Santillana.

AIZPUN LÓPEZ, A. (1983b): Matemática moderna. Diccionario de Ciencias de la Educación (p. 911). Madrid: Santillana.

ALLARDICE, B. S. y GINSBURG, H. P. (1983): «Children's Psychological Difficulties in Mathematics». En Herbert P.Ginsburg (Ed.), The development of Mathematical Thinking (pp. 319-349). Orlando: Academic Press, Inc.

ALSINA CATALÁ, C. (1994): «¿Para qué aspectos concretos de la vida deben preparar las Matemáticas?» Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1, 37-43.

ALSINA CATALÁ, C. et al. (1985): Estados de motivación matemática. Barcelona: Centro de iniciativas y Experimentación para Escolares.

ALSINA CATALÁ, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, J. M., GIMÉNEZ, J. y TORRÁ BITLLOCH, M. (1996): Enseñar Matemáticas. Barcelona: Grao.

ARRIETA GALLASTEGUI, J. (1980): «Matemáticas y escuela: Consideraciones críticas en torno a la situación actual». Aula Abierta, 12, 239-255.

ARRIETA GALLASTEGUI, J. (1985): «¿Contrarreforma en la enseñanza de

las Matemáticas?» Andecha Pedagógica, 15-16, 18-25.

ARRIETA GALLASTEGUI, J. (1989): «Investigación y docencia en didáctica de las Matemáticas: hacia la constitución de una disciplina». Studia Paedagogica, 21, 7-18.

ARRIETA ILLARRAMENDI, M. (1995): «Los procedimientos en Geometría». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3, 13-19.

ARTHUR, J. B. (1989): El pensamiento matemático de los niños. Madrid: Aprendizaje Visor.

AUSUBEL, D. (1978): «In defense of advance organizers: a reply to my critics». Review of Educational Research, 48, 251-257.

AUSUBEL, D., NOVAK, J. y HANESIAN, H. (1989): Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

BAROODY, A. J. (1988): El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar ciclo inicial y educación especial. Madrid: Visor-Ministerio de Educación y Ciencia.

BARQUERO SEGOVIA, V. (1983): Los Programas Renovados y la organización escolar. Sugerencias para el profesorado. Madrid: Escuela Española.

BERGASA LIBERAL, J. y ERASO ERRO, M' D. (1995): «Acerca del desarrollo de una cierta "competencia numérica"». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3, 21-29.

BERMEJO FERNÁNDEZ, V. (1990): El niño y la aritmética: Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas. Barcelona: Paidós.

BERMEJO FERNÁNDEZ, V. y LAGO MARCOS, Md O. (1990): Aprendiendo a contar: su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos. Madrid: Centro de Investigación y

Documentación Educativa.

BISHOP, A. J. (1988): «Mathematics Education in its Cultural Context». Educational Studies in Mathematics, 19 (2), 179 - 191.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (1970): Orden Ministerial de 2 de diciembre de 1970, que publica las Orientaciones Pedagógicas para la Educación General Básica. BOE de 8 de diciembre.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (1971): Orden Ministerial de 27 de febrero de 1971, que regula el material escolar impreso para la Educación General Básica. BOE de 13 de marzo.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (1981): Real Decreto 69/1981 de 9 de enero de Ordenación de la Educación General Básica y fijación de las Enseñanzas Mínimas del Ciclo Inicial. BOE de 17 de enero.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (1982): Real Decreto 710/1982 de 12 de febrero por el que se fijan las Enseñanzas Mínimas para el Ciclo Medio de la Educación General Básica. BOE de 15 de abril.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (1982): Orden Ministerial de 6 de mayo de 1982, que regula las Enseñanzas Mínimas del Ciclo Medio. BOE de 14 de mayo.

BORDÁS ALSINA, 1. (1980): Diagnosis matemática en BOE Tesis doctoral. Universidad de Barcelona, Barcelona.

BOTSINIANOVA, M. E. (1989): «El papel del análisis gráfico en la resolución de problemas aritméticos». Comunicación, Lenguaje y Educación, 3-4, 17-21.

BOURBAKI, N. (1962): «La arquitectura de las Matemáticas». En Le Lionnais et al. Las grandes corrientes del pensamiento matemático (pp. 36-49). Buenos Aires: Universitaria.

BRANDSFORD, J. y STEIN, B. (1987): Solución Ideal de problemas. Barcelona: Labor.

BROUSSEAU, G. (1983): «Tendances originales des recherches en didactique des mathematiques». En Actas del Congreso Ensino da Matematica ano 80 (p. 93). Lisboa.

BROUSSEAU, G. (1990a): «¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?>' (ld parte). Enseñanza de las ciencias. 3, 8, 259-267.

BROUSSEAU, G. (1990b): «¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?>' (2d parte). Enseñanza de las ciencias. 1, 9, 10-21.

BRUNER, J. S. (1960): The Process of Education. Cambridge, Mass.: Harvard Universitv Press.

BRUNER, J. S. (1988): Desarrollo cognitivo y educación. Madrid: Morata.

BUJANDA JÁUREGUI, Md P. (1981): Tendencias actuales de la enseñanza de la Matemática. Madrid: SM.

CALLEJO de la VEGA, Md L. (1991): «La investigación en los problemas de educación matemática». En Centro Madrileño de Investigaciones Pedagógicas, Debate sobre la enseñanza de las Matemáticas (pp. 35-49). Madrid: CEMIP.

CALLEJO de la VEGA, Md L. (1991): «Orientaciones para la elaboración de Unidades Didácticas: Area de Matemáticas». En Col. Documentos IEPS 13. Madrid: IEPS.

CALLEJO de la VEGA, Ma L. (1992): «Currículo de Matemáticas y resolución de problemas». Suma, 10, 23-35.

CALLEJO de la VEGA, Md L. (1996a): «Evaluación de procesos y

progresos del alumnado en la resolución de problemas». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8, 53-63.

CALLEJO de la VEGA, Md L. (1996b): «Selección bibliográfica sobre resolución de problemas». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8, 98-102.

CAMPOS LINS, R. y GIMÉNEZ, J. (1996a): Didática da aritmética e da álgebra. Sáo Paulo: Atual.

CAMPOS LINS, R. y GIMÉNEZ, J. (1996b): «Sentido aritmético y algebraico, ¿o algo más?<' Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 9, 23-31.

CASCALLANA, Ma T. (1988): Iniciación a la Matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid: Santillana.

CASE, R. (1982): «General Development Influences on the Acquisition of Elementary Concepts and Algorithims in Arithmetic». En Th. P.Carpenter, J.M.Moser y Th. A. Romberg (Ed.), Addition and Substraction: A Cognitive Perspective (pp. 156-170). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CASTELNUOVO, E. (1982): Didáctica de la Matemática Moderna. México: Trillas.

CASTRO MARTÍNEZ, E., RICO ROMERO, L. y CASTRO, E. (1987): Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar. Madrid: Síntesis.

COCKCROFT, W. H. (1985): Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Servicio de Publicaciones.

COLLIS, K. (1982): «The Structure of Learned Outcomes: A Refocusing for Mathematics Learning». En Th. P.Carpenter, J.M.Moser y Th. A.Romberg

(Ed.), Addition and Substraction: A Cognitive Perspective (pp. 171-182). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

COLLIS, K. (1982): «La Matemática escolar y los estadios del desarrollo». Infancia y Aprendizaje, 19-20, 39-74.

COMANT, R. y ROBBINS, H. (1970): ¿Qué es la Matemática? Madrid: Aguilar.

COMPANY RICO, J., PEYDRO TORRÓ, S., AGUSTÍ ALMELA, J. y TRENOR PUIG, L. (1988): El aprendizaje del cálculo y la resolución de problemas. Currículo educativo. Valencia: Promolibro-Publicaciones Benissa.

CHEVALLARD, Y. (1980): «Mathématiques, langage, enseignement: la reforme des années soixante». Recherches, 41, 92.

DAVIS, P. J. y HERSH, R. (1988): Experiencia Matemática. Madrid-Barcelona: Labor y Ministerio de Educación y Ciencia.

DEFIOR, S. (1991): «La reforma y las Matemáticas: Análisis comparativo». Cuadernos de Pedagogía, 182, 14-17.

DENIA GARCÍA, A.Md (1986): El desarrollo de las habilidades de adición y sustracción y sus algoritmos: un enfoque cognitivo. Tesina. Universidad de Murcia, Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Murcia.

DIEUDONNE, J. (1971): «La abstracción en Matemáticas y la evolución del álgebra». En J. Piaget et al. La enseñanza de las matemáticas modernas (pp. 42-43). Madrid: Aguilar.

DIENES, Z. P. (1970): La construcción de las Matemáticas. Barcelona: Vicens Vives.

DIENES, Z. P. (1973): Las seis etapas del aprendizaje de las Matemáticas.

Barcelona: Teide.

DIENES, Z. P. (1975): Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Buenos Aires: Paidós.

DIKSON, L.BROWN, M. y GIBSON, O. (1991): El aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: Labor y Ministerio de Educación y Ciencia.

DOMÍNGUEZ MURO, M. (1989): «El uso de materiales en la enseñanza de las Matemáticas». Studia Paedagogica, 21,127-146.

DOSSEY,, J. A. (1988): «Use These Questions to Calculate the Quality of Your Math Instruction». American School Board journal, 175, 8, 22-23.

CHAMORRO, Ma del C. (1992): El aprendizaje significativo en Matemáticas. Madrid: Alhambra-Longman.

CHAMORRO, Ma del C. (1995): «Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3, 31-53.

CHAMORRO, Md del C. (1995): «Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 4, 87-96.

ECHENIQUE, I. et al. (1982): «Matemáticas: notas para un primer balance». Cuadernos de Pedagogía, 93, 27.

ESCUELA ESPAÑOLA (1979): Nuevas orientaciones pedagógicas. Madrid: Escuela Española.

ESCUELA ESPAÑOLA (1985): Programas Renovados de la Educación General Básica. Ciclo Superior. Madrid: Escuela Española.

FERNÁNDEZ BAROJA, Md F., LLOPIS PARET, A.Md y PABLO DE RIESGO, C. (1991): Niños con dificultades para las Matemáticas. Madrid:

CEPE.

FERNÁNDEZ, J. (1997): «Las Matemáticas siguen siendo la materia "cenicienta" de los escolares». Escuela Española, 3.309, 5).

FERRATER MORA (1977): Diccionario de Filosofía. Madrid: Alianza.

FISCHER, R. y VINCE, A. (1990): Investigando las Matemáticas. Madrid: Akal.

FREUDENTHAL, H. (1978): »Enseñanza de las Matemáticas modernas o enseñanza moderna de las Matemáticas?» En J.Hernández (comp.), La enseñanza de las Matemáticas modernas. Madrid: Alianza.

FUENTE MARTÍNEZ, C. de la y PÉREZ ESPINOSA, R.Md (1996): «Resolución de problemas, historia y epistemología de las Matemáticas: hacia su integración en el currículo». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8, 19-28.

GAIRÍN SALLÁN, J. (1987): Las actitudes en educación. Un estudio sobre libre educación matemática. Barcelona: PPU.

GALVÁO SPINILLO, A. (1996): «La comprensión infantil de la proporción y la razón en la escuela primaria. Perspectivas de desarrollo». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 9, 59-64.

GARCÍA GONZÁLEZ, E. (1989): Piaget. México: Trillas.

GÓMEZ ALFONSO, B. (1988): Numeración y Cálculo. Madrid: Síntesis.

GÓMEZ ALFONSO, B. (1995): «Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de Aritmética». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 5, 91-101.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. (1992): Los juegos de estrategia en el currículo de Matemáticas. Col. Apuntes IEPS 55. Madrid: Narcea.

GÓMEZ GRANELL, C. (1989): «La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y la significación». Comunicación, Lenguaje y Educación, 3-4, 5-15.

GONZÁLEZ GARCÍA, J. A. (1983): Discalculias Escolares. Tesis doctoral. Universidad Complutense, Facultad de Psicología, Madrid.

GOOD, T. L., GROUWS, D. A. y DE WAYNE, M. A. (1990): «Teachers' Beliefs SmallGroup Instruction in Elementary School Mathematics». fournal for Research in Mathematics Education, 21, 1,2-15.

GRAU i FRANCH, X. (1988): «La serie numérica: reconstruir para generalizan». En M. Moreno Marimón y equipo del IMIPAE, Ciencia, Aprendizaje y Comunicación (pp. 187-198). Barcelona: Laia.

GROEN, G. y HIERAN, C. (1983): «The Many Faces of Piaget». En Herbert P.Ginsburg (Ed.), The development of Mathematical Thinking (pp. 352-3373). Orlando: Academic Press, Inc.

GUIRAUM MARTÍN, A., GUTIÉRREZ JAIMEZ, R. y SÁNCHEZ REGA, M. N. (1981): Fines, contenidos, métodos, evaluación y resultados de la Matemática moderna en los distintos niveles de EGB, Bachillerato Elemental y Superior Enseñanza Profesional y Escuelas Universitarias. Proyecto Matemáticas 76. Trabajo de información. Universidad de Granada, Instituto de Ciencias de la Educación, Granada.

GUZMÁN, M. de (1989): «Tendencias actuales de la Enseñanza de las Matemáticas». Studia Paedagogica, 21, 19-26.

GUZMÁN, M. de (1994): «¿Para qué el pensamiento matemático en nuestra cultura» Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1, 15-23.

INTERNATIONAL COMISSION MATHEMATICAL INSTRUCTION (1986): Las Matemáticas en primaria y en secundaria en la década de los noventa. Valencia: Mestral.

IZCUE ANCÍN, M. A. (1991): Bases para la medida de un aprendizaje matemático significativo. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Madrid.

JIMÉNEZ PASTOR, V. (1990): Cómo lograr una enseñanza activa de la Matemática. Barcelona: CEAC.

KAMII, C. (1986): El niño reinventa la aritmética. Madrid: Visor.

LANGE, J. de (1989): «La Educación Realista de las Matemáticas». Studia Paedagogica, 21, 27-40.

LAWTON, J. T. y HOOPER, F. H. (1983): «La teoría piagetiana y la educación en la primera infancia: un análisis crítico». En L.S.Siegel, y Ch. J.Brainerd (Comp.), Alternativas a Piaget (pp. 173-200). Madrid: Pirámide.

LEBLANC, J.F., PROUDFIT, L. y PUTT, LJ. (1980): «Teaching Problem Solving in the Elementary School». En S.Krulyk y R.E.Reys (Eds.), Problem Solving in School Mathematics (1980 Yearbook). Reston, Virginia: National Advisory Committee on Mathematical Education (NCTM).

LESTER, F. (1982): Mathematical Problem Solving. Philadelphia: Franklin Institute Press.

LLINARES CISCAR, S. (1990): «El conocimiento y las creencias de los profesores de Matemáticas y la innovación educativa». Investigación en la escuela, 11, 61-70.

LLINARES CISCAR, S. y SÁNCHEZ GARCÍA, Md V. (1989): «Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor>. Revista de Educación, 290, 389-406.

LLINARES CISCAR, S. y SÁNCHEZ GARCÍA, M" V (1990a): «El conocimiento acerca de las matemáticas y las prácticas de enseñanza».

Enseñanza de las Ciencias, 8 (2), 97-104.

LLINARES CISCAR, S. y SÁNCHEZ GARCÍA, M.' V. (1990b): Teoría y práctica en educación matemática. Sevilla: Alfar.

LÓPEZ CARRETERO, A. (1988): «Aprender Matemáticas: dogma o construcción colectiva». En M.Moreno Marimón y equipo del IMIPAE, Ciencia, Aprendizaje y Comunicación (pp. 233-258). Barcelona: Laia.

LÓPEZ del CASTILLO, Md T. (1982): «Planes y programas en la legislación española». Bordón, 242-43, 16.

LÓPEZ FERNÁNDEZ, R. (1989): «Globalización y métodos interdisciplinares en la Enseñanza de las Matemáticas». Studia Paedagogica, 21, 41-48.

LOVELL, K. (1977): Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños. Madrid: Morata.

LUCEÑO CAMPOS, J. L. (1986): El número y las operaciones aritméticas básicas: su psicodidáctica. Alcoy: Marfil.

MacDONALD-ROSS, M. (1985): «Objetivos de conducta. Una revisión crítica». En J.Gimeno Sacristán y A.Pérez Gómez, La enseñanza: su teoría y su práctica (pp. 265-300). Madrid: Akal Universitaria.

MacKNIGHT, C. C. (1990): «The Organization of Curricula in Mathematics». Internationaljournal of Educational Research 14, 2.

MARTÍNEZ, A. y JUAN, F. (1989): Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. Madrid: Síntesis.

MASON, J. (1996): «El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 9, 7-21.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1988): Pensar matemáticamente. Barcelona: Labor y Ministerio de Educación y Ciencia.

MAYER, R. E. (Ed.) (1986): Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidós.

MIALARET, G. (1977): Las Matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan. Madrid: Pablo del Río.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (Sin fecha): Informe sobre la evaluación de las enseñanzas mínimas del Ciclo Medio de la EGB. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1981): Matemáticas. Estudios y experiencias educativas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-Escuela Española.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1985): La enseñanza de la matemática a debate. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989a): Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989b): Diseño Curricular Base. Educación Primaria. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992a): Orientaciones Didácticas. Primaria. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992b): Área de Matemáticas. Primaria. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MORA SÁNCHEZ, J. A. (1995): «Los recursos didácticos en el aprendizaje de la Geometría». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 3, 101-

115.

MUMBRÚ, P. (1993): «Algunas reflexiones en torno a la didáctica de las Matemáticas y su enseñanza». Enseñanza de las Ciencias, Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 3, 308-313.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1991): Estándares curricularesy de evaluación para la educación de la Matemática. SAEM. Sevilla: Thales.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1993): Estándares curriculares y de evaluación para la educación de la Matemática. Addenda Series. SAEM. Sevilla: Thales.

NEWMAN, D., GRIFFIN, P. y COLE, M. (1991): La zona de construcción del conocimiento: Trabajando por un cambio cognitivo en educación. Madrid: Morata y Ministerio de Educación y Ciencia.

NORMAN, D. A. (1985): El aprendizaje y la memoria. Madrid: Alianza.

NORTES CHECA, A. (1979): Psicopedagogía de las Matemáticas. Burgos: Santiago Rodríguez.

NOVAK, J. D. y GOWIN, D.B. (1988): Aprendiendo a aprender. Barcelona: Martínez Roca.

ORTON, A. (1990): Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Morata y Ministerio de Educación y Ciencia.

PÉREZ BALLONGA, J. (1993): «Matemáticas». En A.Zabala (Coord.), Como trabajar los contenidos procedimentales en el aula. Barcelona: Graó.

PÉREZ GÓMEZ, A. (1985a): «Paradigmas contemporáneos de investigación didáctica». En J.Gimeno Sacristán y A.Pérez Gómez, La enseñanza: su teoría y su práctica (pp. 95-138). Madrid: Akal Universitaria.

PÉREZ GÓMEZ, A. (1985b): «Conocimiento académico y aprendizaje significativo. Bases para el diseño de la instrucción». En J.Gimeno Sacristán y A.Pérez Gómez, La enseñanza: su teoría y su práctica (pp. 322-348). Madrid: Akal Universitaria.

PÉREZ GÓMEZ, R. (1994): «Construir la Geometría». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2, 65-80.

PIAGET, J. (1973): «Comments on mathematical education». En A.G.Howson, Developments in Mathematical Education. Cambridge University Press.

PIAGET, J. (1977): Seis estudios de psicología. Barcelona: Seix Barral.

PIAGET, J. (1986): Psicología y pedagogía. Barcelona: Planeta-Agostini.

PIAGET, J. y GATHEGNO, C. (1968): La enseñanza de la Matemática (Revisión española de Maíllo, A. y Aizpún, A.). Madrid: Aguilar.

PIAGET, J. y SZEMINSKA, A. (1982): Génesis del número en el niño. Buenos Aires: Guadalupe.

PIMM, D. (1990): El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Morata y Ministerio de Eucación y Ciencia.

POBLETE, A.GUZMÁN, I. y MÉNDEZ, C. (1996): «Variedades didácticas matemáticas: una propuesta considerando la resolución de problemas». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8, 91-97.

POLYA, G. (1989): Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

POPKEWITZ, Th. S. (1989): «La producción del conocimiento y los lenguajes curriculares. Cuestiones institucionales en el seguimiento de las matemáticas escolares». Revista de Educación, 290, 61-85.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1989): Problemas aritméticos escolares. Madrid:

Síntesis.

RESNICK, L. B. (1983a): «A Developmental Theory of Number Understanding>. En Herbert P.Ginsburg (Ed.), The development of Mathematical Thinking (pp. 110-149). Orlando: Academic Press, Inc.

RESNICK, L. B. (1983b): «Mathematics and Science learning: A new conception». Science, 120, 477-488.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W. (1991): La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós y Ministerio de Educación y Ciencia.

RILEY M. S., GREENO, J. G. y HELLER, J. I. (1983): «Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic». En Herbert P.Ginsburg (Ed.), The development of Mathematical Thinking (pp. 153-192). Orlando: Academic Press, Inc.

RÍO SÁNCHEZ, J. del (1991): Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Estudio comparado de dos metodologías. Madrid: CIDE.

ROMBERG, Th. A. (1991): «Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas». Revista de Educación, 294, 323 - 406.

ROMBERG, Th. A. y CARPENTER, Th. P. (1986): «Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry». En H.C.Wittrock (Ed.), Handbook of Research on Teaching (Third Edition). New York: MacMillan.

ROMERO RICO, L., LÓPEZ FERNÁNDEZ, F., SÁENZ BARRIO, O. y VALENZUELA HERRERÍAS, F. (1978): Proyecto Granada Mats: Análisis experimental de los contenidos oficiales en el área de expresión matemática para el primer nivel de EGB. Trabajo de investigación. Universidad de Granada, Instituto de Ciencias de la Educación, Granada.

ROSALES LÓPEZ, C. (1984): «El lenguaje matemático en los textos

escolares (Primer ciclo EGB)». Enseñanza, 2, 153-162.

SALVADOR PÉREZ, Md I. (1990): Los programas básicos y sus problemas. Universidad Autónoma, Departamento de Didáctica y Teoría de la Educación, Madrid.

SÁNCHEZ ÁLVAREZ, Md A. (1985): Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Un enfoque cognitivo. Tesina. Universidad de Oviedo, Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Oviedo.

SÁNCHEZ HUETE, J. C. (1998): Análisis de los libros de texto de Matemáticas del Ciclo Medio de la Educación General Básica. Tesis doctoral. Universidad Complu tense, Facultad de Educación, Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Madrid.

SANZ, L, ARRIETA, M. y PARDO, E. (1988): Por los caminos de la lógica. Lógica y conjuntos en la EGB. Madrid: Síntesis.

SASTRE VILARRASA, G. (1988): «La creación de estrategias comunicativas y las escrituras aritméticas». En M.Moreno Marimón y equipo del IMIPAE, Ciencia, Aprendizaje y Comunicación (pp. 79-124). Barcelona: Laia.

SCHOENFELD, A. H. (1985): Mathematical Problem Solving. London: Academic Press, Inc.

SERRA SANTASUSANA, T., BATLLE AGELL, I. y TORRA BITLLOCH, M. (1996): «Experimentos en clase de Matemáticas». Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 7, 7-17.

SERRANO GONZÁLEZ TEJERO, J. M. (1982): Un estudio de validación convergente para la determinación de niveles genéticos en la adquisición del concepto de número. Tesis doctoral. Universidad de Murcia, Facultad de Filosofía, Psicología y Ciencias de la Educación.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1993):

Problemas con pautas y números. San Sebastián: Servicio de Publicaciones de la Universidad del País Vasco.

SKEMP, R. (1980): Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: Morata.

SOLÉ i GALLART, 1. (1991): «¿Se puede enseñar lo que se ha de construir? >' Cuadernos de Pedagogía, 188, 33-35.

SOLER, E., ÁLVAREZ, L., GARCÍA, A., HERNÁNDEZ, J., ORDÓÑEZ, J. J., ALBUERNE, F. y CADRECHA, M. A. (1992): Teoría y práctica del proceso de enseñanza-aprendizaje. Madrid: Narcea.

THOM, R. (1978a): «¿Son las Matemáticas "modernas" un error pedagógico y filosófico?» En J.Hernández (comp.), La enseñanza de las matemáticas modernas (pp. 115-129). Madrid: Alianza.

THOM, R. (1978b): «Matemáticas modernas y Matemáticas de siempre». En J.Hernández (Comp.), La enseñanza de las matemáticas modernas (pp. 140-155). Madrid: Alianza.

TORRA BITLLOCH, M. y QUINTANA i ALBALAT, J. (1992): Propuestas de secuencia. Matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia y Escuela Española.

TORRES SANTOMÉ,J. (1982): Jean Piaget ea educacom preescolar Ensino, 5, 11-22.

TREFFERS, A. (1986): Three Dimensions. Dordrecht: Reidel.

VAN ESSEN, G. y HAMAKER, Ch. (1990): «Using-self generated drawings to solve arithmetic word problems». The Journal of Educational Research, 83, 6, 301-302.

VIDA ESCOLAR (1970-1971): Educación General Básica. Nueva Orientación Pedagógica. NOS 124-126.

VIDA ESCOLAR (1980): Programas Renovados. Documentos Base. N« 206.

VIDA ESCOLAR (1981): Niveles Básicos de Referencia. N« 210.

VIDA ESCOLAR (1982): Programas Renovados del Ciclo Medio. N°S 216-217.

VIGOTSKY, L. S. (1984a): El desarrollo de los procesos cognitivos superiores. Barcelona: Crítica.

VIGOTSKY, L. S. (1984b): «Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar de los procesos cognitivos». Infancia y aprendizaje, 27-28.

VILLAR PALASÍ, J. L. (1970-71): «Orden de 2 de diciembre de 1970 por la que se aprueban las orientaciones pedagógicas para la Educación General Básica». Vida Escolar 124-126, 6.

WERTHEIMER, M. (1991): El pensamiento productivo. Barcelona: Paidós.

WILLIAMS, A. (1990): «Mathematics in Transition». British journal of Special Education, 2, 57-60.

WITTGENSTEIN, L. (1987): Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática. Madrid: Alianza Universidad.

PARTE

2ª

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y BASES PSICOPEDAGÓGICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

José Antonio Fernández Bravo

Capítulo **8**

Introducción: la cuestión sobre el conocimiento o los problemas científicos

Toda investigación se enmarca en una situación inacabada, de búsqueda; una propuesta a un estado de duda sobre el que se desea reflexionar, para acceder desde algunos fines a la explicación de algunos fenómenos. Si la situación estuviese terminada la investigación no existiría. El proceso de estudio comienza en la localización de una investigación.

> Decir que el pensar ocurre con referencia a situaciones que todavía están ocurriendo y son incompletas, es decir, que el pensar ocurre cuando las cosas son inciertas, dudosas o problemáticas. Sólo lo que está terminado, completo, está totalmente asegurado. Donde hay reflexión hay suspensión. El objeto de pensar es ayudar a alcanzar una conclusión, proyectar una terminación posible sobre la base de lo que está ya dado. Otros hechos sobre el pensar acompañan a este rasgo. Puesto que la situación en que ocurre el pensamiento es dudosa, el pensar es un proceso de indagación, de observar las cosas, de investigación (Dewey, 1998: 131).

Según la definición en Métodos de Investigación, creada en Canadá para apoyar a la investigación, explica que plantear el problema de investigación es sinónimo de preguntar por el objeto que será estructurado en el proceso de indagación inicial hasta llegar a su conceptualización. Por lo tanto, no es el problema en sí («una oración interrogativa que pregunta la relación que existe entre dos o más variables» [KFm.INGFR, 1981: 11]), sino su enfoque conceptual, su extensión y la contextualización de sus fines, lo que le otorga el calificativo de «científico». Siguiendo a Kerlinger, para que un problema

pueda ser considerado científico debe:

-Ser relevante, es decir, su resolución ha de tener interés para la sociedad.

-Estar formulado de forma precisa, sin ambigüedad. La formulación precisa, permite averiguar de qué se trata realmente, contextualizar el problema y dirigir los pasos necesarios para su resolución

-Estar fundamentado, es decir, enmarcado dentro de alguna teoría.

-Ser resoluble: susceptible de verificación empírica, esto es, que humanamente pueda formular una hipótesis con posible solución3.

El punto de partida de la investigación es la existencia de un problema; una situación de la que se quiere eliminar la duda que ha generado. En este caso, el problema que se nos presenta es obtener datos teóricos sobre la resolución de problemas matemáticos para tenerlos en cuenta y mejorar el rendimiento escolar. La investigación comienza con la constatación de la existencia de un problema y el deseo de resolverlo4.

En las últimas décadas, la preocupación en las escuelas, instituciones e investigación porque la resolución de problemas fuese una actividad del pensamiento, ha generado una inquietud de búsqueda de solución a un problema que, cada vez más, cualquier medio de evaluación e información presenta como «fracaso escolar>. Los datos recogidos revelan una incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias procesales en las que, generalmente, interviene el azar y no el razonamiento; la impetuosa necesidad de llegar a un resultado es lo que más le importa al alumno. La iniciativa, la creatividad, la concentración y la asimilación de técnicas de base en la resolución de situaciones, son escasas y están subrayadas por una reiteración de movimientos apoyados en la imitación de intenciones vacías - muchas veces no comprendida-, y, por lo tanto, desnaturalizada en los procesos y resultados. La participación, la

autoestima y la seguridad del alumno, así como el gusto por la tarea mencionada, intervienen habitualmente de forma negativa 5.

Cuando los programas que se elaboran en el sistema educativo fracasan en la consecución de los objetivos que proponen, se deben investigar las causas no deseadas (suponemos) por las cuales se genera el problema, los obstáculos y condiciones que provocan el efecto, del mismo modo que se deben presentar alternativas a las acciones que mantienen ese déficit. En este sentido, queremos investigar, desde el aspecto teórico, posibles sugerencias para mejorar el rendimiento en la resolución de problemas matemáticos.

Alrededor del 70% de los sujetos presenta dificultades para la resolución de problemas matemáticos. Se observa en ellos la tendencia general a imitar modelos realizados anteriormente, articulando preguntas que dejan al descubierto su falta de seguridad y comprensión de conceptos básicos. Las programaciones subrayaban la necesidad de pensar como principio activo en la resolución de problemas, pero esto era tan escaso en la práctica como reconocido en la teoría. El Servicio de Inspección Técnica de Educación, dentro del Plan General de Actuación, recoge y analiza, anualmente, las calificaciones otorgadas a los alumnos en las diferentes áreas o asignaturas de los niveles de enseñanza no universitaria, a partir de una muestra de alumnos de centros públicos y privados. En estos informes la asignatura que se identifica como más difícil es la asignatura de Matemáticas, por obtener las calificaciones más bajas en comparación con las demás áreas.

Nos surgen preguntas que van estableciendo la dimensión del problema: ¿Por qué los sujetos tienden a utilizar en las nuevas situaciones los últimos procedimientos enseñados?, ¿por qué tienen tanta inseguridad al explicar lo que han hecho?, ¿por qué tienden a utilizar todos los datos numéricos que aparecen en el enunciado de la situación problemática?, ¿por qué tienden a realizar operaciones matemáticas, aun cuando el problema no requiere más que una simple reflexión para ser resuelto?, ¿por qué aplican incorrectamente

las operaciones necesarias a la resolución de un problema?, ¿comprenden, o no, la naturaleza del concepto suma, o resta, o...?, ¿qué entienden ellos por problema?, ¿por qué tienen tanto miedo a la exposición de sus ideas?, ¿será la intervención metodológica del profesor o profesora la que repercute en la actuación de los sujetos?, ¿se ha examinado suficientemente el material que se presenta al alumno para la consecución de los objetivos?, ¿a qué se debe, en los niños, esa ausencia de razonamiento en las estrategias de resolución?, ¿a qué se debe esa falta de atención en la relación de magnitudes?, ¿qué se está logrando?, ¿por qué se logra lo que se está logrando?

La documentación sobre Matemática y Metodología didáctica de la enseñanza de la Matemática, ayudará a centrar y canalizar las intuiciones y conocimientos que poseemos sobre esta ciencia y su enseñanza-aprendizaje.

Los fundamentos de la Matemática no son más que los fundamentos del pensamiento, de la observación, de la intuición, de la imaginación y del razonamiento lógico; de la capacidad para establecer relaciones, para inducir, inferir, deducir, para aplicar un significado a una simbología que opera en nuevas creaciones de significado. Aunque no todos los niños tengan la misma capacidad para aprender Matemáticas, sí todos tienen la misma necesidad de aprenderlas. Se hace entonces necesario estudiar los fundamentos teóricos sobre la resolución de problemas matemáticos, para aportar luz a tantas innovaciones como queramos llevar a cabo en este tema.

El pensar matemático es ajeno a diversas interpretaciones y se identifica, en muchos autores y didactas, en la fórmula de Lejeune-Dirichlet: «Sustituir el cálculo por las ideas» (citado por BOURBAKI en Le Lionnais, 1962: 49). No importan tanto los resultados como los procesos que conllevan a esos resultados, «la noción de que las Matemáticas son un canon de reglas y formalismos inventados por los expertos que todo el mundo tiene que memorizar y usar para obtener respuestas únicas y correctas, debe cambiar» (NCTM, 1991: 433); la formación de un pensamiento eidético en el hacer

matemático significativo, indicando al profesorado la importancia de la construcción del «sentido».

> «El verdadero problema que se plantea en la enseñanza de las Matemáticas no es el de rigor sino el de la construcción del `sentido'» (Thom, en Piaget, Choques, y otros, 1978: 148).

Un problema matemático, no puede ser algo que se tenga que hacer con «sumas» o «restas» o «sumas y restas» o..., es algo que se pueda realizar mediante la acción del pensamiento. ¿Cómo lograr esa dinámica de relaciones? No existe desarrollo intelectual si no se añade algo a lo que ya se sabe. ¿Cómo añadir algo a lo que ya saben?, ¿qué es lo que saben?, ¿qué hacer para saber el grado de profundidad de lo que saben?, ¿qué utilidad tendría la utilización de desafíos para encontrar respuestas a las preguntas planteadas?, ¿cómo desafiarles? El «desafío» que necesitamos se identifica con un apuro preciso que obliga a crear diferentes recursos de continuidad, garantizando el significado y funcionalidad del aprendizaje de la resolución de situaciones problemáticas. «El proceso de enseñanza ha de estar presidido por la necesidad de garantizar la funcionalidad de los aprendizajes, asegurando que puedan ser utilizados en las circunstancias reales en que el alumno los necesita. Por aprendizaje funcional se entiende no sólo la posible aplicación práctica del conocimiento adquirido, sino también el hecho de que los contenidos sean necesarios y útiles para llevar a cabo otros aprendizajes y para enfrentarse con éxito a la adquisición de otros contenidos» (Real Decreto 1344/1991).

El «problema» se introduce por etapas, de menor a mayor dificultad, desde una hasta cuatro operaciones. La mayoría de ellos gozan de idénticas características; existe un enunciado donde generalmente encontramos los datos, y una pregunta a la que hay que dar respuesta numérica mediante una o varias operaciones matemáticas. Pero esto no es suficiente. El contenido del problema debe partir de la realidad que circunda al niño y su realización debe

estar apoyada en objetivos de definida firmeza. En ocasiones, estos objetivos no son otros que los de seguir dando continuidad a un «programa» que comienza con la presentación del algoritmo y la adquisición del automatismo, y culmina con una serie de «problemas» en los que aplicar dicho cálculo.

El informe COCKCROFT (1985: 90-91) habla de la utilidad de las Matemáticas en la medida en que pueden ser aplicadas a la solución de problemas. Añade que dicha solución no podrá darse hasta que el problema haya sido traducido a los términos matemáticos. Pero no dice que esta traducción sea función infor mativa del profesor. El informe de la Mathematical Association Británica (1956, 17), La enseñanza de las Matemáticas en las escuelas primarias, subrayaba que lo importante era ayudar a los niños a comprender las nociones matemáticas y a reconocer el tipo de cálculo o de procesos mentales que requiere una situación problemática. No hay duda de esta importancia, pero, ¿carece de ella ayudar a los niños a crear una situación problemática que requiera un determinado tipo de cálculo?, ¿una situación donde ellos mismos elaboren un plan, determinen la trayectoria, elijan unos datos, expresen una pregunta, edifiquen el problema a su gusto y con su estilo a partir de sus experiencias, presentando problemas abiertos, sin números, sin solución o con varias soluciones?

> «Es esencial desarrollar... la capacidad de resolver problemas.. Suscribimos firmemente la primera recomendación que se hace en An Agenda for Action (NGTM, 1980. 2): "La resolución de problemas ha de ser el punto de mira de las matemáticas escolares Para desarrollar esa capacidad... [algunos problemas] deberían implicar trabajo en pequeños grupos o una clase entera trabajando en conjunto... [o] ser abiertos, sin solución única, [o] habrían de ser formulados' ><

Respecto a la enseñanza del profesor 8.1

En la mayoría del profesorado se observa que:

-No respetan las respuestas de sus alumnos, tienden a esperar la respuesta deseada.

-No utilizan ejemplos y contraejemplos para que el alumno corrija sus errores. Utilizan la información verbal y palabras correctivas: «Bien», «Mal», o formulaciones con la misma finalidad.

-No respetan las respuestas de los alumnos, indicando rápidamente lo que se debería haber dicho o invitando a que hablen tantos alumnos como sea necesario para que el profesor o profesora escuche lo que de antemano se había propuesto escuchar. No se conducía, mediante preguntas el camino de investigación que había propuesto el alumno.

-El lenguaje se utilizaba de forma vaga e imprecisa, creando ambigüedad en la interpretación de lo que había sido comunicado.

Respecto al aprendizaje del alumno 8.2

En el 68% de los sujetos observados6 (VAluos, 1995) se percibieron las siguientes características en sus procedimientos para la resolución de problemas matemáticos. El alumno:

Veía su trabajo como algo que tenía que coincidir con lo que el profesor o profesora pensaba y no como algo de lo que él se tenía que responsabilizar.

Lo que escuchaba lo veía como algo hecho y terminado. Algo que era necesario aprender porque se lo decían en la escuela y, por tanto, el proceso de aprendizaje concluía cuando se era capaz de repetir lo que el adulto había propuesto. La reflexión no formaba parte del proceso de aprendizaje, debido a que no se presentaban dudas que accionasen los mecanismos intelectuales.

La participación era mínima; de unos cuantos a los cuales el «Bien» del Profesora les había señalado en la mayoría de las ocasiones. Por tanto, no jugaban con las respuestas antes de escoger una de ellas.

Tener la completa seguridad de que no importa equivocarse, era algo ajeno a su percepción. Yen su intuición ocupaba un lugar privilegiado todo lo contrario. No daban explicaciones razonadas; exponían el concepto guardado en su interior, y no comprendido.

En definitiva, el esfuerzo por comprender lo que hacían era escaso, no pensaban con una pluralidad de enfoques - sino con el enfoque del profesor-, y tendían a responsabilizar sus actuaciones con la imitación de lo que había sido hecho o dicho.

> «Puede llegar a ser nefasto para la formación matemática de unos alumnos acostumbrarse a pensar que en matemáticas no es necesario comprender [...] Algunos alumnos recurrirán entonces a técnicas superficiales para saber qué han de hacer en determinadas circunstancias. No es tan poco extraño que otros alumnos se desentiendan, se desmotiven y encuentren absurdo ir haciendo operaciones para complacer al profesor o para pasar de clase» (MARTÍ, 1996: 70).

Capítulo 9

Interés por la resolución de problemas en la educación matemática

El interés por la resolución de problemas se sitúa a finales de los años setenta. Existen dos hechos significativos que dan testimonio de ello, según Schoenfeld7.

La importancia por el tema de la resolución de problemas surge por el fallo de los programas para la enseñanza de la Matemática generados anteriormente. En los planes de estudio de la mitad del siglo xx, el cálculo era el elemento eje del que se excluía el razonamiento en la elaboración de estrategias. Como no representaron avance alguno en el rendimiento académico para el aprendizaje de la Matemática surgió otro movimiento conocido como las «nuevas matemáticas» que, por causas diferentes, también fracasaron en sus objetivos. Para SCHOENFEID (1985a: 8)

> «la impresión general ha sido la de que las nuevas matemáticas han sido con mucho, peor que la enseñanza de las que venían a reemplazar. Los alumnos no solamente no conseguían dominar las matemáticas abstractas del nuevo plan de estudios, sino que tampoco conseguían dominar las operaciones básicas. Como resultado surgió a finales de la década de los sesenta, un fuerte rechazo en contra de las nuevas matemáticas y apareció el movimiento de "vuelta al dominio de las técnicas básicas".

Dicho movimiento, que continuó a lo largo de las décadas de los años sesenta y setenta, puso el énfasis en los ejercicios y en la repetición. Se centró en el dominio de operaciones y algoritmos básicos, se supone que como «fundamento» para estudios posteriores». Es en el año 1980 cuando el «National Council of Supervisors of Mathematics» (Consejo Nacional de

Inspectores de Matemáticas), afirma que «aprender a resolver problemas es el principal objetivo a la hora de estudiar las Matemáticas». Pero el documento más influyente sobre el tema es el del «National Council of Teachers of Mathematics - NCTM» (1980) «Agenda for Action». La primera recomendación de este documento dice que la solución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de las Matemáticas en las escuelas en los ochenta.

La interpretación pedagógica 9.1 del nuevo movimiento

Surge una carrera por delimitar el concepto de problema en una metodología didáctica para la enseñanza de la resolución de problemas, denotándose una arbitrariedad en la búsqueda de consenso: «Pedro tiene una bolsa con cinco manzanas. Se come tres de esas manzanas. ¿Cuántas manzanas le quedan a Pedro en esa bolsa?». Para ScHOFNFFI.D (1985a:10) es muy discutible el que se puedan considerar estos tipos de trabajos escolares como de «resolución de problemas» propiamente dichos. Tales ejercicios son, es verdad, más reales y relevantes que los puramente numéricos, pero, en el fondo, todavía son ejercicios de tipo algorítmico o de fórmulas; hay muy poco de «problema» en resolver uno de estos ejercicios, cuando ya se han hecho docenas de tipo parecido». En un informe sobre la educación secundaria en Gran Bretaña, «Aspecs of Secondary Eclucation» (Aspectos de la enseñanza secundaria, 1980), se indicaba la escasez de actividades abiertas a la discusión y el diálogo entre los alumnos, predominando la exposición del profesor en la resolución de problemas.

Pero la historia nos muestra que, aunque el acontecimiento social se represente en la educación matemática a finales de los años setenta, el interés por la importancia de la resolución de problemas no es nuevo. Descartes en su «Regulae ad Directionem Ingenii» señaló algunos consejos que ayudarían a resolver problemas con facilidad. No obstante, se deja ver un elemento que constituye una diferenciación interesante: se subordina la enseñanza al

aprendizaje, tomando importancia el pensamiento del alumno. Cierto, no significa que en la educación matemática, como admite SCHOENFFI,D (1987), las contribuciones de las ciencias cognitivas no se discutan y no se ajusten a las condiciones propias de la disciplina. Aun cuando a los psicólogos les interese explorar cómo se almacena y se tiene acceso al conocimiento usando problemas aritméticos o verbales, existen aspectos metodológicos que de hecho ya han estado influyendo en el desarrollo de la educación matemática. Teniendo esto en cuenta, el avance de la enseñanza de la Matemática se apoya en una nueva aptitud en relación con el aprendizaje de la resolución de problemas, que implicaría el desarrollo individual y social. El «saber matemático resulta ser esencialmente saber de método mucho más que saber de contenido» (GUZMÁN, 1985: 32).

El problema pedagógico, que consecuentemente se deriva de esta nueva aportación, se dirigirá, según BLANCO NIETO (1993: 24), al establecimiento de condiciones adecuadas que ayuden a los alumnos a experimentar estos procesos y consecuentemente a comprender y crear las situaciones que permitan a éstos transferirlas a otras de su propia vivencia. Es decir, establecer condiciones didácticas convenientes que ayuden al alumno a «matematizan> situaciones.

Entrábamos en una época en la que

> «la resolución de problemas tiene que ver con la producción de conocimientos significativos para el que aprende. El conocimiento que se valora por su significación no es el conocimiento transmitido, sino el conocimiento producido por el que está en situación de aprender. Así, si la resolución de problemas ha de ser el lugar de la producción del conocimiento, la tarea de resolver problemas es una tarea privilegiada para el aprendizaje» (PUIG y CERDÁN, 1988: 20).

En los años ochenta, algunas características que dominaban los enfoques de la enseñanza de las Matemáticas y la resolución de problemas, incluían

(SANTOS TRIGO, 1996: 76-77):

-La existencia de un apartado ubicado al final de una unidad o de un curso que se identificaba como «resolución de problemas». En esta parte se generaba una discusión explícita de algunas estrategias y su papel en la resolución de problemas.

-La presentación de los contenidos a los estudiantes con la posterior selección de un problema.

-Los maestros decidían iniciar el estudio de determinado contenido matemático a través de la resolución de algún problema.

-La resolución de problemas se presentaba como un arte que daba lugar a que los estudiantes discutieran una variedad de problemas incluyendo los no rutinarios.

KII,PATRIK (1985) resume el uso de la resolución de problemas en tres direcciones:

-Los problemas se analizan como un vehículo para lograr algunas metas curriculares.

-La resolución de problemas se considera como una de tantas habilidades que se deben enseñar en el currículo.

-La resolución de problemas se ve como un arte en el sentido de simular la actividad matemática dentro del aula. SCHOENFEI,D (1988: 87-88) subraya el sentido del aprendizaje de la Matemática en la necesidad de que los estudiantes interactúen e interanalicen los principios en un salón de clases que presente un microcosmos de la cultura matemática, esto es, clases donde los valores de las Matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana. Entre los principios importantes que Schoenfeld menciona, se destacan:

-Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema.

-Aprender Matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas.

Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas.

-Discutir con los estudiantes problemas que involucren el uso de varios métodos de solución o que incluyan varias soluciones.

-Es importante que los estudiantes participen en el proceso de formular o rediseñar problemas. Esto se identifica como un componente esencial en el hacer matemático.

Capítulo **10**

Relaciones y controversias entre la definición de problema matemático y su educación matemática

¿Cómo relacionar el aprendizaje de las Matemáticas con la resolución de problemas? En el estudio de las Matemáticas, la actividad de resolver y formular problemas desempeña un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones. «El resolver problemas es el corazón de esta disciplina» (HAi.Mos, 1980).

Dieudonné (en, KLEINER, 1986: 31) afirma que

> «la historia de las Matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico..

SANTOS TRIGO (1988: 6,7) asegura que identificar a la resolución de problemas como una propuesta para aprender Matemáticas implica relacionar los aspectos asociados con la naturaleza misma de esta disciplina. Es decir, es importante presentar las características de las Matemáticas que son compatibles con dicha propuesta. Así, lo que se espera del estudiante, el tipo de problemas a considerar en las actividades de aprendizaje, la forma de evaluación son algunos elementos que se sustentan en la naturaleza de las matemáticas.

Que esté aceptado que la resolución de problemas sea el espíritu de la enseñanza de las Matemáticas, no quiere decir que se presente con claridad en la práctica docente.

> «En algunas ocasiones, hemos observado entre los profesores diferentes

> significados para la expresión `Resolución de Problemas'; lo que hace pensar que esta pluralidad pueda estar en el origen de la falta de aplicación práctica, de esta nueva perspectiva metodológica para la enseñanza de las Matemáticas. En otros momentos, se detecta falta de recursos para plantear otro tipo de actividades, en relación de problemas, lo que en ocasiones hace de ésta una actividad mecánica y carente de interés y motivación para nuestros alumnos. (BLANCO NIETO, 1993: 9).

De este análisis resalta la importancia de profundizar en la historia de la Matemática y en el concepto de problema, para buscar relaciones que dirijan con claridad los objetivos de la resolución de problemas en la educación matemática.

La resolución de problemas en las tendencias 10.1 actuales de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática

A finales de los años setenta aparece, de forma explícita, en los objetivos o prioridades de la enseñanza de las Matemáticas, expresados por autores o colectivos, la resolución de problemas. Sin embargo, anteriormente, en un intento de relacionar los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas con las metas generales de la educación, algunos autores señalaron entre otros objetivos, la necesidad de desarrollar la habilidad de usar modelos matemáticos con miras a la solución de problemas (KRUI,IK y WEISE, 1975).

KRYGOWSKA (1979) apoyó la idea de la necesidad de iniciar a los alumnos en la construcción de modelos matemáticos y su utilización para resolver problemas en un sentido que señalaba debía ser diferente del «pragmatismo estrecho» que indica el uso de problemas típicos según esquemas ya prefijados. La necesidad de mantener una actitud abierta a los problemas, la de iniciar procesos de matematización, etc., son para él finalidades específicas de la educación matemática. En su Agenda for Action:

Recommendations for school Mathematics of the 1980s, el NCTM da ocho recomendaciones acerca de la enseñanza de las Matemáticas, que resumen los objetivos y prioridades que este colectivo tiene en relación con esto. En la primera de ellas señalan: «La resolución de problemas debe ser el principal objetivo de la enseñanza de las Matemáticas en la década de los ochenta» (NCTM, 1980). Al año siguiente, publicó un informe titulado Priorities in School Mathematics, acerca de las opiniones sobre el cambio curricular. En él se recoge el nivel de aceptación de las recomendaciones dadas el año anterior, y en particular acerca del significado que pudiera tener, la resolución de problemas. Así, se señala: «El clima creado para la implementación de la primera recomendación parece ser altamente favorable» (NCTM, 1981: 29).

> «Pero el término resolución de problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben de tener a lo largo de sus vidas, y deben usar cuando ellos dejen la escuela. Esta habilidad, es enseñanza y aprendizaje, causa muchos momentos de ansiedad tanto a los estudiantes como a los profesores, pero es una habilidad que puede y debe ser enseñada» (NCTM, 1980: XIV).

No obstante, surgen algunas dificultades en la aplicación práctica de la resolución de problemas en las clases de Matemáticas: «La resolución de problemas surge como aspecto central de las Matemáticas en la escuela primaria para facilitar, a nuestros estudiantes, la transición al siglo xxi. Sin embargo, traducir esta aspiración a las clases prácticas llega a producir, a menudo, consternación y preocupación» (RoSENBAUM y otros, 1989: 7). La resolución de problemas no ha sido una actividad central a largo de la educación matemática, aunque sí ha tenido como centro y eje principal serias dificultades para su aprendizaje, proviene de unos planteamientos metodológicos inadecuados, una falta de motivación en el alumno y una falta de preparación del profesorado en el dominio de su materia.

La apertura a nuevas situaciones y la aplicación de los conocimientos

adquiridos están implícitas en la resolución de problemas. Así, BLANCO NIETO (1993: 21) señala:

> «La resolución de problemas es la principal razón para estudiar Matemáticas, en la línea de considerarla como un proceso de aplicación de conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y desconocidas. Resolver problemas supone plantear cuestiones, analizar situaciones, traducir resultados, ilustrar resultados, dibujar diagramas y refutar pruebas y errores..

Pero la resolución de problemas requiere acciones más amplias de las que hasta ahora se han utilizado:

> «Nuestros alumnos deberían realizar investigaciones sobre ideas matemáticas, identificar y desarrollar modelos, usar experiencias y observaciones para hacer conjeturas, conocer hechos y argumentos lógicos para validar las mismas, distinguiendo entre los argumentos que sean válidos y los que no lo sean. Los estudiantes deberían cuestionar lo razonable de los resultados, y hacer nuevas conjeturas sobre el problema original. Deberían desarrollar el sentido numérico para determinar si los resultados de los cálculos son razonables en relación con los números originales y las operaciones usadas» (Buco NI ro, 1993: 22).

Parece ser, que la metodología utilizada no ha presentado fuentes de inquietud y gusto por la generación de ideas en las estrategias de elaboración. Se hace necesario investigar para actualizar las necesidades de nuestros alumnos y ofrecer técnicas y modelos que aporten motivación en el aula.

> <da motivación se puede conseguir con problemas bien seleccionados por el maestro, con enunciados sencillos, tomados todos ellos en diferentes situaciones y contextos que faciliten la adquisición de los contenidos. No habrá que olvidar que tienen que estar formulados en términos familiares, y que habrá que buscar diversos apoyos

> manipulativos y gráficos. En cuanto a la formulación, el maestro deberá cuidar que pueda comprenderse fácilmente, no solamente el vocabulario matemático, sino también las expresiones usuales, aparentemente sencillas, pero a veces difíciles de entender por el alumno» (VARUOs, 1992: 92 -93).

La resolución de problemas en la década de los noventa 10.1.1

Como enlace a otros contenidos, la resolución de problemas se considera como un hecho prioritario dentro del marco curricular del área de Matemáticas: «La resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas es un contenido prioritario porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de los demás contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la relación entre los distintos bloques de Matemáticas y con las restantes áreas» (VARIOS, 1992: 91).

La resolución de problemas no se ubica en la conclusión de un tema, ni como un tema apartado de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemáti ca, sino que es el núcleo central de la actividad para la comprensión de los conceptos8.

Como a lo largo de los años se ha cuestionado el planteamiento metodológico paralelo a la actividad de resolución de problemas, toma en la LOGSE un carácter firme de revisión en la actualización de las necesidades de los escolares, indicando que

> «el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permitan enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido, se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los

mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema» (Vemos, 1992: 93).

«Raramente la presentación de la solución de un problema por parte del maestro dura más de cinco o diez minutos. A los estudiantes nunca les queda la impresión de que uno puede dedicar horas (mucho menos días, semanas o meses) trabajando en un problema... Se les priva de la oportunidad de mostrar algún progreso en la resolución de problemas complicados y como consecuencia se les reprime de la esperanza de atacarlos a aquellos que son capaces de trabajar estos problemas» (SCHOENFELD, 1985: 368-369).

Ante estos criterios metodológicos de enseñanza, que se contextualizan y diversifican: unos, por la autoridad del enseñante, y otros, por el respeto al hacer del alumno, se hace preciso estudiar la conceptualización del término «problema». Los parámetros que interiormente tengamos para identificarlo marcarán, de una u otra forma, los procedimientos utilizados para el desarrollo de las capacidades de nuestros escolares en la resolución de problemas.

El concepto de problema en la educación matemática 10.2

La dificultad que encierra la definición del término «problema» está ligada a la multitud de variables implícitas, tanto en su realidad como objeto identificado en un texto, como en las aportaciones al sujeto que lo resuelve. Así, se encuentran distintos focos de atención, ya desde un punto de vista epistemológico, ya fenomenológico, gnoseológico...

Problema se puede identificar con categorías propias de la actividad

mental: razonamiento, discernimiento, análisis, síntesis... en un contexto psicológico. Así, tenemos buenos representantes en la escuela rusa, citados por Sarduy (1987):

LFONTIEV (1972) considera que debe entenderse por problema un fin dado en determinadas condiciones. Con este criterio el autor tiene en cuenta el hecho de que cada problema le plantea a quien lo resuelve, la necesidad de obtener determinado producto (fin) que no puede ser alcanzado por cualquier vía, sino sólo por aquella que permiten las condiciones del problema.

RuBINSTFIN (1966: 109), destaca el carácter activo del sujeto. Un problema debe comprenderse como determinada situación problemática hecha consciente por el sujeto. Rubinstein parte así, de establecer una diferencia entre la situación problemática y el propio problema, comprendido la primera como aquella situación que presenta elementos desconocidos, insuficientemente esclarecidos o explícitos. El problema surge precisamente a partir de la situación problemática, y a diferencia de ésta, se caracteriza porque el sujeto tiene conciencia de lo buscado, es decir, que ya su actividad (de solución) persigue conscientemente, el alcance de determinado fin u objetivo, y en consecuencia, organiza y despliega su actividad mental dirigida a resolver el problema.

ESAuI.ov (1972) y G.A.BALL, (1970) expresan definiciones muy cercanas entre sí, haciendo intervenir ambos al sujeto, es decir, el aspecto psicológico, como elemento central. A.F.Esaulov considera que todo problema resulta de una falta de correspondencia o contradicción entre procesos informativos, o sea, entre diferentes elementos de la información que se ofrece en el problema, lo cual hace surgir en el sujeto que lo resuelve la necesidad de realizar las transformaciones que posibilitan eliminar dicha contradicción. G.A.Ball por su lacto, caracteriza el problema como aquella situación que demanda la realización de determinadas acciones (prácticas o mentales) encaminadas a transformar dicha situación.

> Un rasgo peculiar de los problemas en su sentido psicológico radica en que no pueden ser resueltos a partir de la aplicación mecánica y directa de la experiencia anterior; en otras palabras, el planteamiento o el surgimiento de un verdadero problema implica que el sujeto no tiene acceso a la respuesta sólo a través de su memoria, sino que está obligado a pensar a razonar para encontrar los conocimientos necesarios, que conducen a la respuesta o, en términos más amplios, a la solución de problema.< (SARDuY, 1987: 8).

Sin embargo, otros autores no tienen en cuenta el aspecto psicológico, eliminándolo de la definición de problema, FRIDMAN (1977), señala el concepto «problema», específicamente de Matemática. Enfatiza el contenido objetivo del problema sin hacer intervenir el aspecto psicológico; el problema es visto como determinado sistema material que para su caracterización no requiere de la acción del sujeto. Para SVECHNIKOV (1974) un problema matemático es una narración lacónica en la que el valor de algunas magnitudes está implícito y se necesita hallar otro valor de la magnitud, dependiente de los valores ya dados, con los cuales mantiene determinadas relaciones que se señalan en las condiciones.

Para MAYER (1986: 19), cualquier definición de «problema» debería consistir en tres ideas:

-el problema está actualmente en un estado, pero

-se desea que esté en otro estado, y

-no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio.

Asegura este autor, que esta definición es lo suficientemente amplia como para incluir problemas pertenecientes a la geometría (Poi.YA, 1992), al ajedrez (NFWF.I.I. Y SIMON, 1972) o a los acertijos (REITMAN, 1965).

Según LFSTFR (1983), un problema es una tarea para la cual:

-El individuo o grupo se que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución.

-No hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución.

-Y el individuo o grupo debe de hacer un intento para encontrar la solución.

Santos TRIGO (1996: 35-36) anuncia la necesidad de varios componentes para poder identificar un problema:

-La existencia de un interés. Es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución;

-La inexistencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución;

-La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución; (...) d) La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

Algunos autores abordan la definición desde el contenido objetivo del problema: «Por contenido o contenido objetivo del problema se comprende el conjunto de objetos, magnitudes, valores de magnitudes y relaciones que conforman el enunciado. En cada problema matemático con texto se hacen intervenir determinados objetos (personas, sucesos, cosas, animales...) que

ejecutan, sirven de medio o sufren la acción que se desarrolla en el problema. Dichos objetos reflejan, por lo común, hechos reales e intervienen directamente en la na rración que se hace en el texto del problema» (SARDUY, 1987: 10-11). Este mismo autor (p. 13) investiga lo que se comprende por problema desde los objetivos que persigue en el sujeto que lo resuelve: «Por exigencia del problema se comprende aquella parte componente de su estructura general, que especifica el fin u objetivo final a alcanzar por el que lo resuelve, es decir, aquello hacia lo que tiende el sujeto. En los problemas matemáticos con texto como en otros, la exigencia es comúnmente expresada bajo la forma de unas preguntas explícitamente formuladas en un lugar determinado del problema».

MAYER (1986: 18) distingue el hecho de la intención, al exponer ideas que permitan llegar al concepto de problema:

-Datos. El problema tiene en un primer momento determinadas condiciones, objetos, trozos de información, etc., que están presentes al comienzo del trabajo en el problema.

-Objetivos. El estado deseado o terminal del problema es el estado de alcanzar el objetivo, y el pensamiento deberá transformar el problema desde el estado inicial dado al estado terminal.

-Obstáculos. El que piensa tiene a su disposición algunas vías para modificar el estado dado o el estado terminal del problema. Sin embargo, todavía no sabe la respuesta correcta; es decir, la secuencia correcta de comportamientos que resolverían el problema no es inmediatamente obvia.

SARDUY (1987: 12), engloba estos aspectos como estructura general de los problemas matemáticos, utilizando el término «condición» como modificación de estados: «las condiciones constituyen un elemento esencial. Por condiciones se debe comprender aquella parte del problema que transmite

al que lo resuelve, la información inicial acerca del suceso acontecimiento que se desarrolla. Usualmente en las condiciones se incluyen los objetos, las relaciones entre magnitudes y los valores que conforman el contenido objetivo del problema. Usualmente se les denominan datos del problema».

Poi.YA (1992: 9) sugirió que la resolución de problemas está basada en procesos cognitivos que tienen como resultado «encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objetivo que no era inmediatamente alcanzable». Polya establece que tener un problema significa buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar. Esta caracterización identifica tres componentes de un problema:

-Estar consciente de una dificultad;

-tener deseos de resolverla; y

-la no existencia de un camino inmediato para resolverlo.

La estructura específica del problema es su componente más estable que refleja la forma peculiar en que se organizan las relaciones que lo constituyen (relación parte-todo, de diferencia, multiplicativas, aditivas, de adición y división, etc.). Cada problema presenta una organización peculiar de las magnitudes y los valores que lo conforman. Esta organización se presenta como determinada estructura que no varía cuando en el problema (durante la solución) se produ cen transformaciones (operaciones). No obstante estas consideraciones están sujetas a contraste. KII,PATRICK (1985) sugiere que la forma en que se enuncia un problema también influye en su significado. En un sentido general, un problema matemático se identifica como un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y para el cual no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones.

LEIF y DEY.AI.Y (1961: 191) aceptan como significado de la expresión

«problema»: «Toda cuestión respecto de la que se indica el resultado que se quiere obtener y se pregunta por los medios para llegar a él, o bien se indican los medios y se pregunta el resultado».

10.3 La construcción del conocimiento matemático en la resolución de problemas

Generalmente se ha utilizado la expresión «del cálculo al problema», indicando que la resolución de problemas ocupaba un lugar posterior a la adquisición de los conceptos matemáticos. Pero también se ha mostrado, aunque no de forma tan habitual, la eficacia de la resolución de problemas para comprender nuevos conceptos, destrezas y técnicas. Desde esta perspectiva se invierte la expresión de la que hemos partido, construyendo el conocimiento a través del problema o desafío como motor generador del aprendizaje.

El Standard Currículo (NCTM, 1991) afirma que resolver problemas y hacer Matemáticas son sinónimos. La resolución de problemas debería ser usada para introducir nuevos contenidos de matemáticas, ayudar a los estudiantes la compresión de los conceptos y facilitar el aprendizaje de procesos, así como aplicar y revisar los procesos que los estudiantes hayan aprendido. El proceso de aprendizaje debería requerir de ellos analizar las situaciones a la luz de los conocimientos que tengan, desarrollar técnicas matemáticas apropiadas y consecuentemente aplicar estas técnicas a la resolución de problemas. Para ROUCHICR (1985) las situaciones problemáticas tienen que ser de comunicación, cuyo propósito sea adquirir conocimientos, provocar una evolución de los conceptos del alumno objeto de aprendizaje, expresarse, hacerse entender, desarrollar argumentaciones... BLANCO NIETO (1994: 34), menciona

> «una corriente existente en la enseñanza de las Matemáticas que considera la idea de proponer situaciones problemáticas que puedan ser motor de la adquisición de conocimientos, y utilizar el modelo de

> resolución de problemas para la comprensión de los conceptos matemáticos. Bien en la generación de nuevas teorías que encontrarían su justificación y aplicación previamente al establecimiento formal de las mismas, o bien para dar a conocer algunas propiedades concretas que puedan aparecer del análisis de determinados problemas.

En este sentido de finalidad se encuentran los trabajos de BROMME y JUHI, (1984), CARPENTER y MOSER (1983), que afirman que el cálculo de adición y sustracción debería aprenderse a través de las situaciones problemáticas utilizadas en el aula, como necesidad de saber cómo se hace lo que ya se ha elegido hacer. ROMBERG y CARPENTER (1986: 855) señalan:

> «La investigación sugiere que no es necesario aplazar la instrucción con problemas verbales hasta que se hayan dominado las habilidades de cálculo, y que, por tanto, los problemas deben ser integrados de forma más completa en el currículo».

Este mismo enfoque es aceptado por LESH, LANDAU y HAMII.TON (1983: 266):

> «las aplicaciones y resolución de problemas no deberían ser reservados para considerarlos después de que el aprendizaje tenga lugar. Pueden y deberían ser usados como un contexto en el que el aprendizaje de las ideas matemáticas sea posible..

Los problemas abiertos representan un papel importante en esta concepción de ver la enseñanza-aprendizaje de la Matemática como proceso y resultado. SALAZ (1990: 229-230), al referirse a los problemas abiertos, comenta:

> «Al promover la enseñanza actual a través de situaciones problemáticas abiertas, se valora la influencia que la forma de los mismos ejerce en la formación integral del alumno, y no sólo los resultados específicos de

aprendizaje de ciertos contenidos... Al ser la forma el condicionante y no el contenido, es aplicable este método de enseñanza-aprendizaje a todas las áreas... Estimo que la difusión del método de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a través de problemas abiertos ha sido propiciado, además por el estado de rápida evolución en que se encuentra la cultura científica actual; la enseñanza tradicional apoyada en "imitar al maestro" ser capaz de hacer como él hace", ya no es suficiente, pues hay que enfrentarse a un medio muy variable, donde es preciso actuar en situaciones nuevas. Ya no se valoran las capacidades de cálculo, ni siquiera la de resolución de problemas fuertemente estructurados en los que basta la aplicación de reglas sintácticas o algoritmos bien conocidos, pues todo esto puede hacerse con los ordenadores más rápido y con menos fallos. Por eso, hay que potenciar desde edades tempranas la capacidad de extraer toda la información que ofrece una situación, analizar posibles formas de resolución y alternativas. Además, se impone el trabajo en equipo en todos los campos científicos para lograr resultados, por tanto, hay que entrenarse en ello. Yla cultura actual no admite el "criterio de autoridad"; ha de ser el individuo el que ha de convencerse de la validez de su razonamiento, sólo o apoyado por los compañeros..

ARRIETA (1989:64) considera la resolución de problemas como eje del desarrollo curricular:

«Tanto en la investigación y descubrimiento de los conceptos, como en el desarrollo y en la construcción de estructuras, así como en la ejercitación y práctica de las mismas, tiene sentido utilizar un enfoque centrado en la resolución de problemas. Si los conceptos matemáticos se han ido construyendo a lo largo de la historia como instrumentos para resolver determinados problemas, ¿por qué en el ámbito educativo no podemos efectuar la trasposición didáctica adecuada para que los estudiantes sientan esa misma necesidad?'.

Esta moderna concepción de construir el conocimiento matemático a través de la resolución de problemas tiene sus bases filosóficas en el intuicionismo de Lange, Brunschvicg, Goblot, Poincaré, Brouwer... así Goblot (en PIAGET y BETH, 1968:27) presenta una teoría del razonamiento matemático que resume de la siguiente forma:

> «Al cabo de diez años de investigaciones la solución surgió en mi espíritu bruscamente, una mañana de febrero de 1906; y es una idea tan sencilla que no me explico cómo he podido tardar diez años en descubrirla: DEDUCIR ES CONSTRUIR. Lo único que se demuestra son razonamientos hipotéticos: se demuestra que una cosa es consecuencia de otra. Para ello, se construye la consecuencia con la hipótesis; y aquélla es necesaria, por más que introduzca un elemento de novedad, no porque estuviera contenida en ésta, sino porque se ha obtenido mediante operaciones reguladas, es decir, tales que ninguna de ellas sea arbitraria».

El éxito de generar ideas a través de la resolución de problemas no está implícito en el problema en sí, más bien en el método que ajusta la interacción problema-sujeto. Esta interacción ofrece resultados sujetos a la relatividad, y es fructífera únicamente desde una apertura al debate en el aula, a la participación responsable que consigue un pensamiento crítico y una conciencia reflexiva. En el informe Cockcroft, apartado 232, leemos:

> «Dado que la comprensión es un estado mental al que cada alumno ha de acceder de modo individual, no es algo que el profesor pueda observar directamente. El hecho de que un alumno resuelva correctamente un problema concreto no siempre significa que haya comprendido los conceptos correspondientes. Para valorar la profundidad de su comprensión es más seguro acudir a actividades de debate, mediante la realización de trabajos prácticos o de actividades más generales de resolución de problemas. A medida que evoluciona la comprensión, el

profesor necesita ponerla a prueba periódicamente más con profundidad para que el alumno adquiera conciencia de la necesidad de reflexionar de modo más profundo y crítico».

ROMBERG (1992) afirma que un punto de vista dinámico de las Matemáticas tiene consecuencias importantes en su aprendizaje. Por ejemplo, la enseñanza de las Matemáticas incluye el aceptar que los estudiantes pueden crear o desarrollar sus propios conocimientos matemáticos. Existen evidencias que establecen que los estudiantes aprenden Matemáticas sólo cuando construyen activamente sus conceptos. Para que entiendan lo que ellos mismos aprenden, deben apropiarse de habilidades asociadas a verbos como «examinan>, «representan>, «transformar», «resolver», «aplicar», «probar» y «comunicar». Esto generalmente sucede cuando los estudiantes trabajan en grupos, participan en discusiones, realizan representaciones y, en algunos caminos, se encargan del desarrollo de su propio aprendizaje. En resumen (NCTM, 1990), un punto de vista dinámico de las Matemáticas conlleva a un ambiente de aprendizaje que tienda:

-Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.

-Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la sola autoridad para dar las respuestas correctas.

-Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las Matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.

-Hacia la resolución de problemas y no solamente dar énfasis al proceso de encontrar respuestas mecánicamente.

-Hacia la conexión y aplicación de las Matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Si el debate en el aula es condición imprescindible, los problemas tienen que aportar sugerencias para abordar el debate. No hay, por tanto, que huir de la dificultad; un problema fácil concluye y da por terminado el acceso al descubrimiento. LESTER (1983) expresa la importancia que tiene el que los profesores comprendan que algo de fracaso no es solamente una buena cosa sino parte necesaria de la resolución de problemas. El estudiante puede no encontrar la solución inmediatamente, aunque dicha solución pueda estar al alcance de la mano. Los alumnos no deben de ser conducidos a creer que si una tarea no puede hacerse fácilmente entonces no puede hacerse en absoluto. WHFATLEY (1984) indica que una buena disposición para resolver problemas se puede alcanzar dentro del marco de la escuela, para lo que señala las siguientes recomendaciones:

-Crear una atmósfera propicia para la exploración, ya que los alumnos responden de forma positiva.

-Fomentar posturas de interés y desafio hacia la exploración de problemas orales. Trabajando en grupo, presentando los problemas a través de material, relacionando los problemas con el juego...

-Presentar situaciones problemáticas variadas. Situaciones que den al niño posibilidad de observar, describir, clasificar, ordenar, comparar, conjeturar, preguntar o realizar una representación deberán de formar las bases de un buen desarrollo mental.

-Animar a los niños a desarrollar estrategias de resolución de problemas. Utilización de modelos, conjeturas y pruebas, ordenación de los datos y/o representación de los mismos.

-Dar importancia a la actividad de contar y a la formación de patrones.

-Facilitar a los niños material manipulativo. El material proporciona modelos que ayudan a la resolución de problemas de forma concreta, poco a poco

se realizará el paso desde la manipulación y asociación de actividades mentales hasta la abstracción.

-Fomentar la interacción entre los niños. El aprendizaje se consigue por el intercambio de ideas en un grupo, favoreciéndose, así mismo, el paso del egocentrismo al respeto del punto de vista del otro.

El concepto de «problema matemático» que tienen los escolares, según Fernández Bravo 10.3.1

Intentando profundizar en el tema teníamos que considerar la medida de la distancia que existe entre lo que A «debe entender» sobre B y lo que A «entiende» sobre B.Considerar, entonces, lo que el alumno entiende por «problema» - verificándolo con el modo de actuar - y lo que el alumno debe entender por «problema». El análisis de esta diferencia orientaría los medios hacia la disminución de esa distancia, acercando, lo más posible, la expresión de su medida a cero.

De las investigaciones realizadas9 se obtienen cinco clases distintas en tanto a la relación: concepción de «problema»-«forma de actuar», en las que podemos incluir la generalidad de los casos. Son las siguientes:

Acomodación operativa con necesidad de solución. A esta clase pertenecerían aquellos sujetos que identifican problema con una determinada forma de presentación, en la que incluyen un conjunto de operaciones «disfrazadas». Estos alumnos hacen operaciones con el fin de obtener un resultado cualquiera, y no el resultado. Lo importante es llegar a una solución, y tienen la seguridad de que ésta se recoge después de hacer alguna operación. Acomodan - en una estética de la composición - algo que les haga dar por terminado el problema. No estudian la solución; expresan lo que han obtenido aunque nada tenga que ver con lo que se les ha preguntado. Algunas de las concepciones sobre «problema» expresadas por estos alumnos son las siguientes: «Una serie de palabras con números y preguntas que hay que

averiguar el número que tiene que salir»; «Lo que se resuelve con operaciones»; «Una frase que se responde con números»; «Un escrito que hay que resolver con sumas, restas, multiplicaciones y solución».

Reflexión operativa. A esta clase pertenecerían los que admiten que un problema es algo que ayuda a pensar. No obstante, esta clasificación está enmarcada en una complejidad; existen sujetos que admiten que hay que pensar, pero no actúan pensando, y existen, también, los que son consecuentes con lo que admiten. En este sentido, dentro de esta clase habría dos subclases: Reflexión operativa consciente y Reflexión operativa inconsciente. Estarían en la primera de las subclases, aquellos niños que reflexionan, razonando la estrategia que utilizan. Suelen ser ágiles de pensamiento y creativos. Generalmente, terminan correctamente el problema y son capaces de explicar el proceso seguido. A la segunda de las subclases, pertenecerían aquellos sujetos que saben que hay que pensar pero que no lo han asimilado en su forma de actuar; suelen proceder de manera similar a la expresada en la clase 1: Acomodación operativa...; La concepción de «problema» de todos estos alumnos es la misma, distinguiéndose, únicamente, en su forma de actuar: «Algo muy pensativo que tienes que resolver»; «Una situación difícil que nos ayuda a pensar».

Sustitución de Contenido. Estos alumnos confunden el instrumento con su función. Entienden por problema un conjunto de operaciones difíciles. Una operación es un problema siempre que ésta sea difícil. Generalmente, no llegan a la solución. Dejan la resolución del problema a medias. Lo dan por terminado cuando aun no es así; es el «hacer por hacer». Los sujetos que pertenecen a esta clase utilizan expresiones parecidas a las siguientes para definir lo que entienden por problema: «Una división, una suma o una resta difícil»; «Un lío de ope raciones cada año más largas y más difíciles» ; «Algo que nos dicen los profesores para aprender las cuentas»

Imitación de iniciativas. A esta clase pertenecen aquellos alumnos que

hacen bien, únicamente, lo que saben hacer. No son creativos y se sienten felices con la reiteración de ejercicios. Protestan cuando no se han hecho problemas similares, descargando la responsabilidad en la enseñanza del profesor. Mecanizan procedimientos a partir de asociaciones intuitivas, buscando imitar algo que se haya hecho anteriormente. Son aquellos sujetos que no saben calcular el área de un rectángulo que aparece en posición vertical, porque su mente siempre asocia un rectángulo en posición horizontal. Estos alumnos suelen expresar su concepción de problema con un ejemplo o señalando una función práctica, así, podríamos encontrar formulaciones como las siguientes: «Es aprender lo que le falta de "euros" (dirían ahora; que antes decían pesetas)»; «Es cuando te dicen tengo 10 caramelos y te dan 8, ¿cuántos caramelos tengo?»; «Es lo que sirve para aprender mucho».

Negación consciente. Pertenecen a este grupo los sujetos que se han rendido ante la resolución de problemas. Creen que es algo inaccesible para ellos. Suelen dejar el problema en blanco, ni lo intentan. Aunque, en ocasiones, se limitan a rellenar el espacio que se deja para su resolución con un dibujo, o copian algún dato del enunciado que expresan de distinta forma a como aparece en el problema. Así, si en el enunciado del problema aparece, por ejemplo, el dato numérico 30, en la resolución aparece este dato como resultado de alguna operación: 10 + 20 = 30. La concepción que estos alumnos tienen sobre «problema», la expresan con estructuras similares a las siguientes: «Una manera de complicarte la vida»; «Un rollo»; «Un lío»; «Algo difícil y aburrido».

Como se puede observar, después de haber analizado las cinco clases, una mejora de los resultados indicaría un considerable volumen de alumnos integrados en la clasificación de la Reflexión operativa consciente: «Lo que importa sobre todo es que el niño aprenda a pensar. Que obre por principios, de los cuales se origina toda acción» (KANT, 1803: 39).

Las dificultades presentadas por los alumnos en la resolución de problemas matemáticos 10.3.2

Exponemos las dificultades que se presentan con mayor frecuencia, según el estudio anterior, por la mayoría de los sujetos que cometen error en la resolución de problemas matemáticos.

-Dificultad: Falta de comprensión del problema. No conocen el vocabulario específico utilizado, o la situación planteada no les es familiar.

Ante esta dificultad se propone, como pauta de ayuda, que el alumno explique el problema con sus propias palabras. ¿Cómo va a ser eso posible si el alumno no lo comprende? Por otro lado, se pide al alumno, que intente recordar un problema que haya hecho anteriormente, parecido al problema presentado: ¿Qué entiende el niño por «parecido»? Esto su pone invitar al alumno, bajo la incomprensión del problema que tiene que realizar, a que aplique, desde el azar, la resolución más reciente que la atribución de rapidez encuentre en su pensamiento.

-Dificultad: Estrategias de resolución incorrectas. Incomprensión de la relación existente entre los datos y la pregunta. Aplican operaciones al azar; lo importante es llegar a un resultado por absurdo que éste sea.

Ante esta dificultad se le propone, habitualmente, al alumno, que invente un problema más fácil. Pero, ¿qué entiende el alumno por «más fácil»? Normalmente, los niños entienden por «más fácil», aquel problema cuyos datos numéricos se representan con números menores que los expresados en el problema original, pero al no comprenderse la relación conceptual del contenido matemático implícito, el problema resultante como «más fácil» es frecuentemente un absurdo. Supongamos que un niño no sabe resolver este problema: «Me han sobrado 87 céntimos de euro de 2 euros que tenía. ¿Cuánto dinero he gastado?», se le pide que invente otro más fácil, y el resultado puede ser el siguiente: «Me han

sobrado 15 euros de 10 céntimos de euro que tenía...». Como hemos dicho anteriormente, el alumno tiene unas concepciones heredadas de su experiencia y la instrucción recibida, y una posible explicación puede ser la siguiente: El niño ha leído la palabra «sobrado» en el enunciado del problema. Ha podido establecer una asociación lingüística con la operación de restar debido a sus experiencias anteriores de resolución de problemas. A partir de esta concepción emplea un posible contenido sabiendo que a un número mayor se le resta uno menor, de ahí la utilización, y en este orden, de 15 y 10.

«Mira, papá, en la escuela soy muy bueno en aritmética. Puedo sumar restar multiplicar y dividir y hacer cualquier otra operación, la que se te ocurra, muy rápido y sin errores. El problema es que a menudo no sé cuál de ellas usara (WERTHEIMER, 1959: 125).

Otras dificultades:

-Pasar por alto las unidades o los elementos de la magnitud que se expresa en el enunciado, respecto a la que se expresa en la pregunta.

-Intuir lo que se les pregunta, sin reflexionar sobre el contenido real de la pregunta del problema.

-Aplicar operaciones mediante asociación lingüística. Si en la pregunta leen «quedan», restan; si leen, por ejemplo, «en total», suman...

-Operar los datos numéricos en el mismo orden en el que aparecen en el enunciado y utilizando todos los que aparecen.

-Buscar constantemente la operación o conjunto de operaciones en la resolución del problema sin relación lógica, debido a que tienen una concepción de que hay que hacer siempre «alguna operación».

-Buscar una solución por absurda que sea.

-Aplicar el último concepto aprendido o la última operación que se ha visto en clase.

-Utilizar estrategias incorrectas cuando los datos numéricos se representan mediante números elevados, aunque comprendan la relación expresada con números inferiores.

Para BARBERÁ (1995: 29), existen cuatro bloques de dificultades:

-La comprensión global de la situación problemática.

Ladiscriminación de los datos que son necesarios y los que no lo son.

Las relaciones escalares que se establecen entre datos numéricos.

-La explicación verbal de la solución obtenida.

Por un lado, cabe la posibilidad de que el profesorado no se haya cuestionado las funciones de la resolución de problemas, y el concepto de «resolución de problemas» no se entienda en la práctica como se lee en la teoría. Es posible que se actúe con creencias de que el aprendizaje de la resolución de problemas se apoya en la reiteración, fundamentando en la cantidad la calidad del progreso y desarrollo. Y en ese desarrollo se olviden algunas variables con factores cognitivos y sociales determinantes en el proceso de adquisición y soltura.

> «Muy a menudo se pierde de vista, quizá por demasiado obvio, que la relación de enseñanza-aprendizaje tiene, antes que cualquier otra, una dimensión social, tanto por los condicionantes que actúan sobre ella como por la forma de organizar esta relación y por la dinámica que genera y los efectos que produce en los individuos que en ella intervienen, maestro incluido. La incidencia de esta dimensión, la forma como se configura en un contexto escolar concreto, no es neutra sino que actúa generando unos efectos bien específicos, que afectarán a otras

dimensiones como la cognitiva, la afectiva, etc., presentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje» (RÚE, 1990: 2).

La comunicación1° que se desarrolla en el aula está ligada al desarrollo social, define la organización interactiva y la estructura socio-afectiva del grupo-aula. El respeto al alumno, como forma de trabajo, supone respetar sus ritmos, escuchar sus respuestas, permitir la reflexión - como diálogo interior - y el trabajo en pequeños o gran grupo. Stenhouse sostenía con lógica los siguientes principios de procedimiento (ELLIOTT, 1994: 85):

1.La actividad central del aula debe ser el diálogo en vez de la instrucción.

2.Debe protegerse la divergencia de puntos de vista.

3.El criterio que rija la actuación del profesor debe ser la neutralidad de procedimiento.

Existen ocasiones en las que el trabajo personal antecede al diálogo entre todos. No ha de entenderse esta idea como una forma de posesión individual, sino como instauración de un campo de relaciones comunicativas; ¿qué decisión se puede tomar por la palabra si no se sabe de qué se está hablando? Se le plantea al alumno la realización individual de una situación problemática. La delibe ración por todos los compañeros del trabajo realizado, no queda excluida, sino ordenada. Esta deliberación, cuando el profesor actúa de manera que permita la construcción de los distintos planteamientos", genera un clima de tolerancia donde los factores competitivos se sustituyen por elementos cooperativos de adaptación y adecuación. «Se debe facilitar el razonamiento independiente, que los alumnos tienen que tener libertad para plantear problemas, expresar, desarrollar y comprobar sus ideas y discutirlas con los demás» (ELLIOTT, 1994: 86).

El alumno expone libremente las estrategias de resolución utilizadas, la

actitud de escucha y la actitud crítica de las conjeturas expuestas se contextualiza formalmente. La solución del problema se construye junto al alumno expositor defendiendo las consideraciones abiertas, refutándolas o aceptándolas; la seguridad en uno mismo toma la fuerza que necesita para su desarrollo. «La resolución de problemas es el aspecto del trabajo matemático que precisa de una dosis más fuerte de seguridad (emisión de conjeturas) y de autoestima (persistencia en la búsqueda de soluciones y uso de los errores como fuente del conocimiento y no como elemento de fracaso personal)» (VELÁZQUEZ, 1995: 29).

La experiencia propia de la investigación en la resolución del problema proporciona una satisfacción por descubrir la solución. No puede estar, por ello, esta enseñanza basada en la arbitrariedad, carente de contenido y motivación estilística, intelectual y temperamental.

Capítulo **11**

Clasificación de problemas matemáticos simples

Los problemas matemáticos simples se identifican, también, en algunos autores como problemas aritméticos elementales. Los problemas aritméticos se subdividen en: Uno. Problemas de una etapa, que son los que se solucionan mediante la aplicación de una operación aritmética. Dos. Problemas de más de una etapa, que son los que precisan de varias operaciones combinadas para ser resueltos. Por lo que se ha expuesto, parece ser que todos estos problemas tienen solución, y que ésta es, generalmente, numérica. Como no todos los problemas matemáticos tienen solución, quizá hubiese sido más propicio empezar por una clasificación más amplia. Así, por ejemplo: Problemas con solución y sin solución; y dentro de esta clasificación podríamos crear una subclase de generación de estructura: Problemas numéricos y no numéricos (que a través de los números sea posible hacer Mmatemática, no quiere decir que el hacer matemático sea exclusivo de la utilización de los números).

La clasificación de problemas matemáticos no ha sido tarea fácil. Se puede atender a la naturaleza del problema o al contexto en el que se resuelve; a la componente sintáctica, a las relaciones matemáticas o a su estructura lógica;... Actualmente se perciben dos tendencias de clasificación: las que se corresponden con la composición del problema, y las que se corresponden con una dimensión subjetiva, en tanto a las relaciones exigidas al pensamiento de la persona que lo resuelve. Respecto a la dimensión subjetiva es firme la vinculación que existe entre problema y pensamiento-. Para MAYER (1986: 21), una definición general de pensamiento incluye tres ideas básicas:

-El pensamiento es cognitivo pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente, en la mente o el sistema cognitivo, y debe ser inferido indirectamente.

-El pensamiento es un proceso que implica alguna manipulación o establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitivo.

-El pensamiento es dirigido y tiene como resultado la «resolución» de problemas o se dirige hacia una solución.

Respecto a la clasificación de los problemas matemáticos, PoiYA (1992) sugiere dos tipos de categorías. En la primera identifica aquellos en donde se pide encontrar algo. Aquí se dan algunas condiciones o datos y la idea del problema es determinar el valor de alguna incógnita. Polya señala que en este tipo de problemas se debe especificar claramente las condiciones que debe satisfacer la incógnita. La otra categoría la relaciona con problemas donde algo debe ser probado.

Simon (1973, en SANTOS TRIGO, 1996: 33-34) presenta una caracterización general de las propiedades que tienden a agrupar o identificar dos tipos de problemas: Los problemas bien estructurados y los que no presentan una estructura bien definida. Los primeros son aquellos que generalmente aparecen en la instrucción o en los libros de texto matemáticos. En este tipo de problemas la información para resolverlos es parte del enunciado, las reglas para encontrar la solución son claras, y existen criterios definidos para resolverlos. Por otro lado, los problemas mal estructurados son aquellos que generalmente se encuentran en la vida diaria. Aquí es frecuente que no exista suficiente información para resolverlos, o quizá demasiada información. Así, quien intente resolverlos necesita reformularlos y proveer o eliminar cierta información en la fase de resolución. En cualquier fase de solución, las opciones de qué pasos seguir no son siempre claras. En este tipo de problemas, quien los resuelve necesita un amplio repertorio de procesos

para reconocer una solución.

FREDERICKSEN (1984) sugiere tres categorías en la clasificación de problemas:

-Problemas bien estructurados son aquellos que aparecen claramente formulados, se pueden resolver con la aplicación de algún algoritmo conocido y existen criterios para verificar si la solución es correcta.

-Problemas estructurados que requieren un «pensamiento productivo». Son parecidos a los bien estructurados con la condición de que el que los resuelve necesita diseñar todo el proceso de solución o parte de éste. Por ejemplo, el probar que si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos e iguales entonces los otros dos lados son iguales también, es un problema en el que se requiere la introducción de una diagonal no clada. Además, aquí no existe un algoritmo que produzca clirectamente la demostración.

-Problemas mal estructurados, los cuales carecen de una clara formulación, de un procedimiento que garantice una solución, y no existen criterios definidos para determinar cuándo se ha obtenido una solución. Quien confronta este tipo de problemas necesita reformular el enunciado y desarrollar una serie de estrategias para su solución.

RIETMAN (1965) analiza cuatro categorías de problemas según lo bien que estuvieran especificados el estado inicial y el final, en la composición del problema.

Estado inicial bien definido y estado final bien definido. «¿Cómo se podría convertir la oreja de una cerda en una cartera de seda?» Obsérvese, sin embargo, que aunque el estado ciado (oreja de cerda) y el estado final (cartera de se da) están claramente especificados en este problema, hay una grave carencia de vías posibles para solucionarlo.

Estado inicial bien definido y estado final mal definido: «¿Cómo se podría volver a diseñar el Cadillac El Dorado para obtener un mejor kilometraje en gasolina?» El estado dado, el automóvil, está claramente designado, pero ¿qué quiere decir exactamente «mejor kilometraje en gasolina»?

Estado inicial mal definido y estado final bien definido: «Explique los mecanismos responsables de las manchas solares». El objetivo, «manchas solares», es claro, pero el estado inicial que causa este objetivo no lo es.

Estado inicial y estado final mal definidos: «¿Qué es rojo y hace chuf-chufa «La respuesta es «una manzana fuera de borda».

GREENO (1978) ha sugerido una tipología tripartita de problemas:

-Problemas de estructura inductora. Se dan varias instancias y quien resuelva el problema debe descubrir la norma o modelo implícito.

-Problemas de transformación. Se da un estado inicial y el que resuelva el problema debe hallar una secuencia de operaciones que produzca el estado final.

-Problemas de ordenamiento. Se dan todos los elementos y el que resuelva el problema debe ordenarlos de forma tal que resuelva el problema.

MAYER (1986: 20) anota la señalización de Greeno, de que no todos los problemas pueden ser clasificados con precisión en uno de estos tres tipos. En cambio, muchos de los problemas más interesantes incluyen aspectos con diversos tipos de problemas.

Dentro de una estructura de clasificación respecto a la composición de problemas aritméticos elementales, se encuentran: los problemas de tipo aditivo y los problemas de tipo multiplicativo.

Problemas de tipo aditivo 11.1

> «Existen varios tipos de relaciones aditivas y, en consecuencia, varios tipos de adiciones y sustracciones. Las matemáticas consideran, a justo título, a la sustracción y a la adición como operaciones matemáticas estrechamente emparentadas. Por problemas de tipo aditivo" entendemos aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por "estructuras aditivas" entendemos las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones o sustracciones» (VERGNAUD, 1991: 161).

Problemas de estructura aditiva son aquellos que se resuelven con una operación de suma o de resta. De ellos podemos hacer varias clasificaciones dependiendo del tipo de variable que consideremos. Los problemas simbólicos de estructura aditiva variarán según la sentencia abierta dada en el problema. Cambiando la incógnita se generan seis sentencias abiertas para la suma y otras seis para la diferencia.

❑ Tipos de sentencias abiertas

El interrogante representa la situación desconocida. Se dan tres situaciones: Inicial, intermedia y final.

Para la suma	Para la resta
a + b = ?	a – b = ?
a + ? = c	a – ? = c
? + b = c	? – b = c
? = a + b	? = a – b
c = ? + b	c = ? – b
c = a + b	c = a – ?

El estudio sobre la dificultad que presentan las diferentes sentencias (CASTRO y Rico, 1995: 37) ha dado las siguientes conclusiones:

-Las sentencias canónicas de adición y sustracción (a + b =?, a - b =?) presentan menos dificultad que las no canónicas.

-Las sentencias de sustracción son generalmente más difíciles que las de adición.

-No hay diferencias notables entre las sentencias a +? = c;? + b = c, y, a -? = c, en cuanto a dificultad.

-La sentencia minuendo desconocido? - b = c, es significativamente más difícil que las otras cinco.

-Las sentencias con la operación al lado derecho del signo igual son significativamente más difíciles que las otras.

Atendiendo a las relaciones semánticas, se pueden distinguir cuatro tipos

de problemas: causa/cambio, combinación, comparación e igualación (RII.EY y otros 1983; KINTSCH y GREENO, 1985; CARPENTER y MOSER, 1982; BERMEJO, 1990 y otros).

1.Problemas de causa/cambio. Se caracterizan por la presencia de una acción que implícita o explícitamente, modifica una cantidad inicial dando como resultado el incremento o decremento de esa cantidad. Hay tres subtipos de problemas de cambio:

-Tipo 1. En él se propone la cantidad inicial y la magnitud del cambio.

• Ejemplo: Aurora tiene 7 cromos. Alicia le regala a Aurora 3 cromos. ¿Cuántos cromos tiene ahora Aurora?12

-Tipo 2. En él son conocidos la cantidad inicial y el resultado del cambio, debiendo de hallarse la magnitud del cambio.

•Ejemplo: Ana tiene a cromos. ¿Cuántos necesita para tener b? (b>a)13

-Tipo 3. En esta se descompone la cantidad inicial.

•Por ejemplo: Ana tiene algunos cromos. Alicia le da 3. Ahora tiene 8. ¿Cuántos tenía al principio?

Los tres tipos anteriores representan Cambio-Unión. Existen otros tres tipos de Cambio-Separación, similares a los anteriores14

2.Problemas de combinación. Presentan situaciones en las que se proponen dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo, sin que haya ningún tipo de acción. Se pueden distinguir dos tipos según el lugar en el que se ubica la incógnita. No hay un tercer tipo porque las partes son intercambiables.

	PARTE	PARTE	TODO
TIPO 1	CONOCIDA	CONOCIDA	?
TIPO 2	CONOCIDA	?	CONOCIDA

Veamos algunos ejemplos:

-Tipo 1. Ana tiene 4 cromos y Alicia tiene 3 cromos. ¿Cuántos cromos tienen entre las dos?

-Tipo 2. Ana tienen 7 cromos. Alicia también tiene algunos. Entre las dos tienen 9 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Alicia?15

3.Problemas de comparación. Suponen la relación de dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. Existen seis tipos de problemas.

TIPO	RELACIÓN A	RELACIÓN B	DIFERENCIA	EJEMPLOS
1	C	C	?	A tiene a. B tiene b. ¿A más que B?
2	C	C	?	A tiene a. B tiene b. ¿B menos que A?
3	C	?	C	A tiene a. B tiene b más que A. ¿B?
4	C	?	C	A tiene a. B tiene b menos que A. ¿B?
5	?	C	C	A tiene a. A tiene b más que B. ¿B?
6	?	C	C	A tiene a. A tiene b menos que B. ¿B?

** C = CONOCIDO

4.Problemas de igualación. Constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, por una parte hay una acción implícita que tiene que aplicarse a uno de los conjuntos, y por otra la comparación de dos conjuntos disjuntos. Podemos considerar seis tipos de problemas, similares a los tipos de comparación. La relación de igualación se expresa desde la notación «tantos como» o «los mismos que»:

-Tipo 1. Ana tiene 7 cromos. Alicia tiene 3. ¿Cuántos han de darle a

Alicia para tener los mismos que Ana?

-Tipo 2. Ana tiene 7 cromos. Alicia tiene 3. ¿Cuántos tiene que perder Ana para tener tantos como Alicia?

-Tipo 3. Alicia tiene 3 cromos. Si le dan 4 tendrá los mismos que Ana. ¿Cuántos cromos tiene Ana?

-Tipo 4. Alicia tiene 7 cromos. Si Ana pierde 3 tendrá tantos como Alicia. ¿Cuántos cromos tiene Ana?

-Tipo 5. Ana tiene 7 cromos. Si a Alicia le dan 4 tendrá los mismos que Ana. ¿Cuántos cromos tiene Alicia?

-Tipo 6. Ana tiene 7 cromos. Si Alicia pierde 4 tendrá los mismos que Ana. ¿Cuántos cromos tiene Alicia?

Las investigaciones apuntan que los problemas de cambio resultan al niño más fáciles. Los de igualación resultan más complejos que los de combinación. Atendiendo al lugar ocupado por la incógnita, el éxito de los niños es mayor cuando la incógnita o término desconocido se sitúa en el resultado. DICKSON, BROWN y GIBSON (1991), analizando los tipos de problemas descriptivos de adición, especifican los siguientes problemas:

-Parte-parte-todo (según CARPENTERy MOSER [1982]), Brown los denomina de unión y Vergnaud: estado-estado-estado. Ejemplo: Ana tiene 3 caramelos de menta y 5 de fresa. ¿Cuántos caramelos tiene en total?

-Adjunción (CARPENTER y MOSER [1982]), Brown lo denomina añadir y Vergnaud denomina a este tipo: estado-transformación-estado. Ejemplo: Ana tiene 3 caramelos y compra 5. ¿Cuántos caramelos tiene?

-Comparación (CARPENTER y MOSER [1982]) a este tipo Vergnaud lo

denomina: estado-relación-estado. Ejemplo: Ana tiene 2 caramelos y Alicia tiene 5 más que Ana. ¿Cuántos caramelos tiene Alicia?

-Sustracción complementaria (Brown). Ejemplo: Ana le da 3 caramelos a Alicia. Ahora le quedan 5. ¿Cuántos caramelos tenía Ana al empezar?

-Sustracción vectorial. Vergnaud lo llama: transformación-transformacióntransformación. Ejemplo: Por la mañana Ana se come 2 caramelos. A la hora de la merienda tiene 5 caramelos más que al desayunar. ¿Cuántos caramelos compró por la tarde?

11.2 Problemas multiplicativos

- Vergnaud y Schwartz

«Se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas: definimos así las relaciones que comportan una multiplicación o una división. La más importante de ellas, que se utiliza para la introducción de la multiplicación en la escuela primaria y que forma la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria; por ello no está bien representada en la escritura habitual de la multiplicación: a x b = c, ya que dicha escritura no comporta más que tres términos. Estamos pues obligados a reexaminar completamente la noción de multiplicación» (VERGNAUD, 1991: 197).

En estos problemas intervienen tres datos a, b, c; por tanto, no son problemas simples de estructura multiplicativa. Vergnaud los utiliza para hacer constar al respecto que: deberá quedar ya claro que los problemas de multiplicación y división son casos simples de los problemas más generales de regla de tres y se distinguen de estos en que uno de los cuatro términos implicados es igual a uno (VERGNAUD, 1983).

El análisis que hace VERGNAUD (1983, 1991) de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división muestra que los problemas «simples» de este tipo se sitúan casi siempre en el marco de dos grandes categorías:

-Categoría isomorfismo de medida.

-Categoría producto de medida.

La otra gran estructura que considera Vergnaud la proporción múltiple se refiere a problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes y que son, por tanto, problemas compuestos en los que para su resolución hay que emplear más de una operación.

SCHWARTZ (1986) apuesta por la Matemática como una actividad de modelización y piensa que los problemas aritméticos contribuyen a proporcionar a los estudiantes un conjunto de herramientas analíticas con las que comprender mejor el mundo en que vive. Las cantidades usadas en Matemáticas se derivan de las acciones de contar y de medir, dependiendo de que estemos cuantificando propiedades continuas o discretas del entorno. Todas las cantidades que surgen en el curso de medir, o en el subsecuente cálculo con estas cantidades, tienen unidades de referencia y Schwartz se refiere a ellas como cantidades adjetivadas.

En el conjunto de las cantidades resultantes de contar o medir es posible definir un conjunto básico de operaciones binarias. Estas operaciones pueden ser usadas para generar nuevas cantidades que pueden tener o no nuevas unidades de medida. La composición de dos cantidades matemáticas para producir una tercera cantidad derivada puede tomar cualquiera de las dos formas, composición conservando el referente o composición transformando el referente.

La composición de dos cantidades, similares o no, para producir una

tercera cantidad que es, en general, no similar a las dos cantidades originales se conoce como composición transformando el referente. La multiplicación y la división son composiciones que transforman el referente. Las composiciones que transforman el referente obligan a distinguir entre dos tipos de cantidades en cierto modo diferentes, cantidades extensivas y cantidades intensivas (SCHWARTZ, 1988: 41). Las cantidades extensivas se pueden clasificar en discretas (D) y continuas (C) y puesto que, en general, las intensivas son el cociente indicado de dos extensivas, podemos clasificarlas en los cuatro tipos siguientes: D/D, C/ D, D/C, C/C.

Los enunciados de los problemas de estructura multiplicativa simples contienen dos cantidades conocidas, los datos, y una cantidad por hallar. Cada una de ellas puede ser de uno de los tipos citados. Pero este aspecto es secundario en la clasificación que hace Schwartz. El aspecto fundamental es la distinción entre cantidades extensivas y cantidades intensivas. A partir de ella establece tres tipos de ternas de cantidades que corresponden a categorías distintas de problemas.

❑ Isomorfismo de Medida

La primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo (VERGNAUD, 1991: 197-210).

-Ejemplo: «Tengo 3 paquetes de yogur. Hay 4 yogures en cada paquete. ¿Cuántos yogures tengo?».

El esquema de estructura de este problema es el siguiente (de ahí que se entienda como relación cuaternaria):

1 paquete → 4 yogures

3 paquetes → x yogures

❑ Producto de medida

Esta forma de relación consiste en una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional. He aquí algunos ejemplos (VERGNAUD, 1991: 211-224):

-Ejemplo 1. «3 muchachos y 4 muchachas quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha y cada muchacha con cada muchacho. ¿Cuántas parejas posibles hay?»

-Ejemplo 2. «Se quiere fabricar banderines con tela de dos colores diferentes (rojo y azul). Si los banderines han de tener tres franjas, ¿cuántos banderines diferentes se pueden fabricar?»

❑ Esquema de la clasificación de problemas multiplicativos

La clasificación de problemas multiplicativos por su estructura semántica se puede esquematizar como sigue:

Problemas de razón (o isomorfismo de medidas):

-Multiplicación-razón: E X I (razón) =? «Pedro tiene 3 sobres. En cada sobre tiene cinco cromos. ¿Cuántos cromos tiene en total?»

-Participación-razón: E X? (razón) = E «Pedro ha comprado 3 sobres de cromos que le han costado 60 céntimos de euro. ¿Cuánto cuesta cada paquete?»

-Agrupamiento-razón:? X 1 (razón) = E «Pedro ha comprado algunos sobres de cromos. Si cada sobre cuesta 20 céntimos de euro y ha pagado 60 céntimos de euro, ¿cuántos sobres ha comprado?»

Problemas de comparación:

-Multiplicación-cuantificador: E X 1 (cuantificador) = E «María tiene 5 céntimos de euro y Arturo tres veces más. ¿Cuánto dinero tiene Arturo?»

-Agrupamiento-cuantificador: E X? (cuantificador) = E «María tiene 5 céntimos de euro y Arturo 40 céntimos de euro. ¿Cuántas veces más tiene Arturo que María?»

-Partición-cuantificador:? X 1 (cuantificador) = E «María tiene una cantidad de céntimos de euro. Arturo tiene 20 céntimos de euro que es cuatro veces más de lo que tiene María. ¿Cuántas céntimos de euro tiene María?»

Problemas de combinación (o de producto de medidas):

-Multiplicación-combinación: E X E =? «En un armario hay 3 pantalones y dos camisas. ¿De cuántas formas distintas podemos vestirnos?»

-División-combinación: E X? = E «En una discoteca hay 5 chicos y algunas chicas. Se pueden formar 15 parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en la discoteca?»

Problemas de conversión:

En los que la cantidad intensiva es una razón.

•Multiplicación-conversión: 1 X 1 =? «En una estantería hay algunas cajas. En cada caja hay 5 bolsas y en cada bolsa 7 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en cada caja?»

•División-conversión: 1 x? = 1 «En cada caja de una estantería hay varias bolsas de caramelos. Si cada bolsa tiene 7 caramelos y en cada caja hay 35 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene cada bolsa?»

-En los que la cantidad intensiva es un cuantificador.

•Multiplicación-conversión: 1 X 1 =? «A tiene dinero. B tiene 4 veces el dinero que tiene A. C tiene 5 veces el dinero que tiene B. ¿Cuántas veces tiene C el dinero que tiene A?»

•División-conversión: 1 X? = 1 «A tiene dinero. B tiene 4 veces el dinero de A y 5 veces el dinero de C. ¿Cuántas veces tiene C el dinero de A?»

En los que una cantidad es una razón y la otra un cuantificador.

•Multiplicación-conversión: 1 X 1 =? «En un sobre hay 5 cromos. En un sobre más grande que el anterior hay 3 veces los cromos que hay en el primero. ¿Cuántos cromos tiene el último sobre?»

•División-conversión: 1 X? = 1 «En un sobre hay 5 cromos. En otro hay 20 cromos. ¿Cuántas veces mayor es el segundo sobre más que el primero?»

❑ Nesher

Para NESHER (1986), los análisis tanto de Vergnaud como de Schwartz se apoyan en el concepto físico de análisis dimensional. La diferencia entre ellos consiste en que Schwartz considera que en la estructura multiplicativa hay una relación entre tres cantidades mientras que Vergnaud considera que la relación es cuaternaria. Nesher se sitúa en una perspectiva lingüística y, al igual que hizo con los problemas de estructura aditiva (NESHER y KATRIEL, 1977), distingue tres grandes categorías de problemas elementales de estructura multiplicativa.

Problemas que denomina «mapping rule»

Se corresponden con los problemas que Vergnaud denomina «isomorfismo de medidas» y con el tipo 1 x E = E' de Schwartz. En esta categoría considera dos subtipos: problemas de multiplicación y de división. En los problemas de

división considera dos tipos: cuotitivos y partitivos.

Problemas de comparación multiplicativa

No están contemplados como categoría independiente en el análisis de Vergnaud (que los engloba como isomorfismo de medidas) ni en el de Schwartz (que los engloba en el tipo 1 x E' = E"). BROWN (1981) los llama problemas de «factor multiplicativo», BEo, y otros (1988) los denominan «cambio de tamaño con la misma unidad», y otros los emplean como «problemas de factor escalan» (scale factor problems). Los ejemplifica con el siguiente problema:

-Dan tiene 5 canicas.

-Ruth tiene 4 veces tantas canicas como Dan.

-¿Cuántas canicas tiene Ruth?

En el que cada una de las oraciones expresa lo siguiente: en la primera línea dice que hay un conjunto referente que contiene «n» objetos «y» (Dan tiene 5 canicas); en la segunda línea dice que hay una función específica que aplica cada elemento «y» del conjunto referente en un conjunto comparado de objetos «x» (por cada canica de Dan, hay exactamente 4 canicas de Ruth); y en la tercera línea, en la que se enuncia la cuestión del problema, pregunta cuántos objetos «x» hay en el conjunto comparado (¿Cuántas canicas tiene Ruth?).

Problemas de multiplicación cartesiana

Están incluidos en la categoría «producto de medidas» de Vergnaud y en la categoría E x E' = E" de Schwartz, y son considerados como problemas simétricos por BEJ.I. Y otros (1988).

❑ Producto simétrico y producto asimétrico

CASTRO y Rico (1995: 58) explican la distinción entre una relación simétrica y una relación asimétrica. La distinción que hace Vergnaud entre isomorfismo de medidas y producto de medidas, la expresan BEI.I. Y otros (1988) en función de si el producto es o no simétrico. En el producto de medidas (por ejemplo, en los problemas de áreas) las dos cantidades elementales (el largo y el ancho) juegan el mismo papel y pueden ser intercambiadas. En este caso Bell y colaboradores consideran que el producto puede ser denominado simétrico. Sin embargo, en el isomorfismo de medidas las dos cantidades que aparecen como datos en el problema desempeñan papeles distintos. Por ejemplo, si tenemos 3 cajas y cada una contiene 4 lápices, la estructura consiste en repetir 3 veces un conjunto de 4 objetos, o 4+4+4; y según este grupo de investigadores no tiene sentido expresar esta estructura como 4 lotes de 3 elementos. En este caso dicen que la multiplicación es asimétrica.

11.3 Otra clasificación de problemas matemáticos simples

En la metodología de la enseñanza de la Matemática, usualmente los problemas simples se clasifican en grupos, atendiendo a las operaciones aritméticas a partir de los cuales ellos pueden resolverse, y a los conceptos matemáticos que los alumnos asimilen en el curso de la solución.

11.3.1 En función de los conceptos matemáticos que asimilan los alumnos

Veamos específicamente cómo se clasifican los problemas matemáticos simples según los conceptos matemáticos que revelan a los alumnos. Esta cuestión está expresada con bastante detalle en M.A.BANTOVA, G.V.BEI.TIUKOVA y A.M.POI,EVCHIKOVA (1973), y en M.L.MORO y A.M.PICHKALO (1975) (todos citados por Sarduy, 1987: 23).

Los grupos de problemas que se constituyen a partir de ese criterio, son los tres siguientes:

-El primer grupo que engloba los problemas simples cuya solución revela a los alumnos el significado concreto de cada una de las operaciones aritméticas. A través de ellos, los alumnos asimilan la correspondencia que existe entre las operaciones aritméticas y las operaciones con conjuntos.

-En el segundo grupo se incluyen aquellos problemas a partir de los cuales el escolar aprende el vínculo existente entre los componentes y los resultados de las operaciones aritméticas.

-El tercer grupo incluye los problemas que permiten revelar a los alumnos nuevos significados de las operaciones aritméticas. De este grupo participan problemas asociados a los conceptos de diferencia y de relación.

Estos grupos se diversifican en distintos tipos (SARDUY, 1987: 24-26). A continuación analizamos la diversificación de los tipos con algunos ejemplos adaptados a nuestro entorno.

❑ Primer grupo

Problemas que revelan el significado concreto de las operaciones aritméticas.

-Determinación de la suma de dos cifras: «Marta tiene tres cuadernos rojos y dos verdes. ¿Cuántos cuadernos tiene marta en total?».

-Determinación del residuo: «Los niños recogieron 25 botellas. Dos botellas se rompieron. ¿Cuántas botellas pudieron entregar los niños?».

-Determinación de la suma de dos sumandos iguales (producto): «En tres macetas se siembran plantas a dos plantas por cada maceta. ¿Cuántas plantas se siembran en total?».

-División en partes diferentes: «Dos grupos de niñas plantaron 8 árboles.

Cada grupo plantó la misma cantidad. ¿Cuántos árboles plantaron las niñas de cada grupo?».

-División por contenido: «Cada sobre de cromos contiene 8 cromos. Si tengo 24 cromos, ¿cuántos sobres me he comprado?».

❑ Segundo grupo

Problemas que revelan el vínculo existente entre los componentes y los resultados de las operaciones aritméticas.

-Determinación del primer sumando conociendo la suma y el segundo sumando: «Paula compró algunas cintas azules y 3 blancas. En total compró 8 cintas. ¿Cuántas cintas azules compró Paula?».

-Determinación del segundo sumando conocida la suma y el primer sumando: «Paula compró 5 cintas azules y algunas blancas. ¿Cuántas cintas blancas compró Paula?».

-Determinación del minuendo, conociendo el sustraendo y la diferencia: «Los alumnos de un aula confeccionaron banderitas. Cuando regalaron 3 todavía les quedaron 9 banderitas. ¿Cuántas banderitas confeccionaron los niños?».

-Determinación del sustraendo, conociendo el minuendo y la diferencia: «En una pecera había 8 peces. Algunos se regalaron y todavía quedaron 3 peces. ¿Cuántos peces fueron regalados?».

-Determinación del primer factor, conociendo el producto y el segundo factor: «Un número desconocido se multiplica por 8 y se obtiene 32. ¿Cuál es el número?».

-Determinación del segundo factor conociendo el producto y el primer factor: «4 se multiplica por un número desconocido y se obtiene 32. ¿Cuál es el

número?».

-Determinación del dividendo conociendo el divisor y el cociente: «Un número desconocido se divide por 9 y se obtiene 4. Encontrar el número desconocido».

-Determinación del divisor conociendo el dividendo y el cociente: «36 se divide por un número desconocido y se obtiene 4. Encontrar el número desconocido».

❑ Tercer grupo

Problemas que revelan nuevos significados de las operaciones aritméticas.

-Diferencia comparativa de números o determinación de la diferencia de dos números: «Una casa se construye en 10 meses y otra en 8 meses. «¿Cuántos meses más que la segunda se tarda en la construcción de la primera casa?».

-Diferencia comparativa de números o determinación de la diferencia de dos números: «Una casa se construye en 10 meses y otra en 8 meses. ¿Cuántos meses menos que la primera se tarda en la construcción de la segunda casa?».

-Aumento de un número de algunas unidades (forma directa): «En la construcción de una casa se emplean 8 meses y en la de otra 2 meses más. ¿Cuántos meses se emplean en la construcción de la segunda casa?».

-Aumento de un número en algunas unidades (forma indirecta): «En la construcción de una casa se emplean 8 meses, esto es 2 meses más de lo que se emplea en la construcción de otra casa. ¿Cuántos meses se emplean en la construcción de la segunda casa?».

-Disminución de un número en algunas unidades (forma directa): «En la construcción de una casa se emplean 10 meses. Otra casa se construye en 2 meses menos que la anterior. ¿En cuántos meses se construyó la segunda casa?».

Problemas en los cuales se introducen conceptos de relación.

-Relación multiplicativa de números o determinación de la relación de dos números: «Un aula tiene 24 niñas y 8 niños. «¿Cuántas veces más niñas que niños hay en el aula?».

-Relación multiplicativa de números o determinación de la relación de dos números: «Un aula tiene 24 niñas y 8 niños. ¿Cuántas veces menos niños que niñas hay en el aula?».

-Aumento de un número en varias veces (forma indirecta): «En un aula hay 8 niños. Estos son tres veces menos que el número de niñas que hay en el aula. ¿Cuántas niñas hay en el aula?».

-Disminución de un número en varias veces (forma directa): «En un aula hay 24 niñas y tres veces menos cantidad de niños. ¿Cuántos niños hay en el aula?».

-Disminución de un número en varias veces (forma indirecta): «En un aula hay 24 niñas. El número de niñas es tres veces mayor que el de los niños. ¿Cuántos niños hay en el aula?».

En función de la exigencia que plantean al que los resuelve 11.3.2

Los problemas matemáticos pueden ser clasificados también atendiendo a la naturaleza o tipo de la exigencia que plantean al que los resuelve. Un análisis atento de la exigencia (pregunta, indicación u orden) nos muestra que por lo común en ella se expresa la necesidad de: hallar algún elemento que se considera como incógnita o como lo buscado, realizar alguna construcción,

demostrar algo. En correspondencia con el tipo de exigencia que plantean al que los resuelve, los problemas se dividen en problemas de hallazgo o determinación; problemas de construcción y problemas de demostración.

Son ejemplo de problemas de hallazgo o determinación todos los expuestos hasta ahora. En el caso de los problemas de construcción como planteamos, al alumno se le sitúa la tarea de confeccionar, según las condiciones del problema, esquemas, gráficos, igualdades, ecuaciones, tablas, etc.

Los problemas de demostración aparecen fundamentalmente como problemas geométricos en los cuales se requiere demostrar propiedades de figuras geométricas o de algunos de sus elementos constituyentes. La demostración se realiza a partir de un conjunto de razonamientos que se suceden en un orden riguroso y lógico. Resulta sumamente importante hacer algunas consideraciones respecto a la clasificación de los problemas según el tipo de exigencia. No siempre un problema se puede ubicar en un grupo excluyendo su pertenencia a otro; por ejemplo, muchas veces durante la solución de un problema de hallazgo o determinación, surge la necesidad de realizar alguna construcción. En tales casos, bien podría decirse que el problema es un híbrido (hallazgo y construcción). Otras veces un problema de demostración se presenta también como de hallazgo, pues antes de demostrar lo que se nos pide, debemos encontrar un valor, una propiedad, etc., de los elementos que lo integran. La clasificación de los problemas según las exigencias, presenta gran importancia práctica, pues muchas veces la simple determinación del tipo de problema nos permite precisar el mecanismo o la vía de su solución, o al menos, limitar la zona de búsqueda, proporcionando esto gran economía en la solución.

SARDUY (1987: 28-29) hace también referencia, dentro de la clasificación de problemas matemáticos, a dos tipos de problemas que, desafortunadamente, están ausentes de la enseñanza actual de esta asignatura: los denominados problemas de razonamiento y los recreativos.

Los problemas de razonamiento precisan para ser resueltos del análisis lógico, de elaboración de hipótesis, inferencias, etc. Desde luego, la denominación de problema de razonamiento es, en cierta medida, tautológica, todo verdadero problema implica la reflexión, el razonamiento por parte del que lo resuelve; no obstante, tal denominación no hace más que reafirmar el hecho de que estos problemas requieren de una forma especial, el razonamiento. Por exigir una alta dosis de trabajo mental, este tipo de problema constituye un factor esencial en la formación del pensamiento y en la asimilación de los conocimientos matemáticos. Presentemos algunos ejemplos de problemas matemáticos de razonamiento, que se pueden emplear en la enseñanza primaria.

> «En el aula B hay 10 alumnos menos que en el aula A. ¿Cómo varía esta diferencia si del aula A se trasladan 5 alumnos para el aula B? ¿Cómo varía si se trasladan 5 alumnos de la B a la A?.»

Respecto a los problemas recreativos cabe decir que presentan situaciones interesantes que estimulan el razonamiento y la fantasía. Los problemas matemáticos recreativos con texto (PERELMAN, 1968) sitúan a los alumnos ante la necesidad de analizar detenidamente las situaciones planteadas, pues la mayoría de las veces

> «las relaciones entre los elementos que las componen (datos, condiciones, exigencias) se ofrecen enmascaradas, con la introducción de elementos contradictorios u otros que dirigen el razonamiento por cauces incorrectos. La necesidad - el esfuerzo por superar tales aspectos constituyen una de las más potentes condiciones para el desarrollo del pensamiento y la estimulación de la actividad mental. (S.Duy 1987: 29).

Capítulo **12**

Protocolo para la resolución de problemas: estructura, descripción y análisis de las fases

Actualmente se admite que la resolución de problemas no es un acto puramente cognitivo. CAFLEJo (1994) recoge diversas variables que forman parte del proceso de resolución: «una base de conocimientos (intuiciones y conocimientos informales sobre el dominio del problema, hechos, procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios no algorítmicos, reglas para trabajar en el dominio del problema, estrategias heurísticas) y al control y regulación de dichos conocimientos, intervienen también los afectos (creencias, actitudes y emociones) y las condiciones socioculturales en que se realiza la tarea».

Ante todo, resolver un problema es un acto creativo, que comporta diversas fases: un trabajo consciente de preparación o familiarización con el problema; la incubación de las ideas con las que se ha trabajado en la etapa anterior; la inspiración o iluminación sobre el camino que lleva a la solución; y la verificación del proceso que lleva al resultado buscado. Esto implica que no tiene mucho sentido proponer un problema para resolverlo en tiempo limitado, puesto que así no se da lugar a la incubación; además, dado que la inspiración es algo que se puede favorecer pero nunca asegurar, un fracaso aislado no es significativo mientras que un éxito puede ser bastante revelador (CALLFJo, 1996: 55).

De lo que esta investigadora nos habla como adquisición actual, se reflexionaba a principios del siglo xix, Goblot, Brouwer, Heyting, propusieron algunas ideas (en PIAGET y BETH, 1968: 29-31): «Pero

entonces, el concepto mismo de construcción deja de ser tan nítido como parecía serlo antes, sólo lo es en virtud de la convención que nos prohíbe, en un contexto matemático determinado, proceder al análisis de la génesis de las entidades utilizadas. En cuanto al análisis epistemológico y el psicológico, semejante prohibición carece de toda autoridad, pero, dado que el razonamiento matemático tiene que respetarla, es evidente que semejantes análisis se verán obligados a buscar más allá de los límites convencionales impuestos a este último razonamiento. A esta primera explicación se añade la consideración que sigue. En el pensamiento automático, esto es, en el complejo de actividades mentales que eventualmente conducen a la solución razonada de un problema matemático, conviene distinguir al menos dos fases consecutivas, o más bien tres, que son las siguientes:

La fase de la búsqueda En ella no se impone restricción alguna al pensamiento: todos los medios son buenos con tal que nos acerquen al objetivo. Esta es la fase del pensamiento matemático espontáneo, original, verdaderamente inventivo e incluso creador.

La fase del arreglo, que tiende a presentar la solución, una vez que se la haya encontrado, bajo la forma de un razonamiento correcto. Esta fase puede también exigir cierta inventividad'6, pero no una verdadera creación.

La fase de la comprobación, que consiste en repensar el razonamiento para comprobar si es correcto y si verdaderamente conduce a una solución del problema planteado.

Ahora bien, las publicaciones matemáticas no reproducen, por lo general, más que la fase 3); cosa suficiente para que el lector, repensando a su vez el raciocinio, pueda juzgar acerca del valor científico de la solución propuesta. Pues la fase 2) no presenta en sí misma un interés independiente: si la tentativa de arreglo fracasa es que la solución obtenida es incorrecta, incompleta o confusa, de modo que habrá que volver a la fase 1); y esta última es, en general, tan irregular que apenas se la puede reproducir de

forma comprensible: en un momento dado se cae en la cuenta, con cierta sorpresa, de que se ha alcanzado la meta, y no sería nada fácil señalar el camino por el que se haya llegado allí».

Las distintas tendencias, por las que ha pasado el protocolo' para la resolución de problemas, nos han legado la recopilación de las que se proponen actualmente; subyacen, por tanto, a una perspectiva histórica:

-La comprensión del enunciado. Traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático.

-La comprensión del problema. Consciencia de las relaciones lógicas, conceptuales matemáticas que intervienen.

-La búsqueda de varias estrategias de resolución.

-La aplicación de las estrategias.

-La revisión y comprobación del proceso seguido.

Enumeración y análisis de las fases. Una perspectiva histórica 12.1

En la obra ya clásica How we think (1910), J.DFwFY (1933) nos ofrece el primer análisis lógico de los actos del pensamiento. El hecho de plantearse el pensamiento como proceso, va a abrir puertas a sucesivos estudios desglosando las diferentes potencialidades. Describe cinco niveles:

-El encuentro con una dificultad. Tomar conciencia de que existe.

-Localización y precisión de la misma.

-Planteamiento de una posible solución.

-Desarrollo lógico de las consecuencias derivadas.

Ulteriores observaciones y procedimientos experimentales nos llevan a la aceptación o rechazo de la solución hipotética. Este proceso es aceptado por WOODWORTH (1935), matizando que el pensamiento creador busca un camino de solución no recorrido por los demás.

En 1913 Henri Poincaré'a (citado por MAYER, 1986: 64) puso las bases de posteriores estudios sobre el proceso creativo. Apoyado en sus propias experiencias y siguiendo un camino paralelo al análisis de Dewey para el pensamiento lógico y Ribot para el tipo analítico e intuitivo, marca las fases del pensamiento inventivo. Las ideas, la intuición, quedan recogidas en el Origen de la Ciencia.

-Fase de preparación.

-Fase de incubación.

-Movimiento de iluminación.

-Verificación.

Este planteamiento lo hizo el propio Wallas en 1926, siendo desde entonces aceptado y citado con pequeñas variantes por los estudiosos de la creatividad, como WOODWORTH (1935), BATATO (1974), TAYI.OR (1958), entre otros.

En 1922, R.Simpson llega a determinar la fluidez, flexibilidad, originalidad, elaboración y redefinición utilizando 50 juegos como estímulo a unos dibujos que han de realizar los escolares. Detecta un aumento de capacidad creadora hacia el 3e, grado y una disminución en el 4° grado. En el 6° llega a su apogeo la imaginación productiva, para disminuir en el 7° y 8° curso. Plantea y concluye, en un artículo titulado «La imaginación creativa», una relativa independencia entre creatividad e inteligencia. Define la habilidad creativa como «la iniciativa que uno manifiesta por su capacidad de

apartarse de la secuencia común de pensamiento». Creyó que los tests de creatividad deberían añadirse a los tests de inteligencia para que también se valore «una energía creativa vital».

En 1926, Graham Wallas en su clásico libro The Art of Thought sugiere cuatro etapas en el proceso creador19:

-Preparación. Recolección de información e intentos preliminares de solución.

-Incubación. Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir.

-Iluminación. Aparece la clave para la solución (aquí es donde se produce el «destello del insight» o el «ajá»).

-Verificación. Se comprueba la solución para estar seguros de que «funciona».

En 1931, Joseph Rossman considera de nuevo las fases que caracterizan la invención. Es un planteamiento particular de la creatividad, montado sobre el proceso del pensamiento racional de la investigación. Señala siete fases:

-Se observa una dificultad o se siente una necesidad.

-Análisis de dicha dificultad o necesidad. Se formula el problema.

-Búsqueda y recogida de la información necesaria.

-Se adelantan posibles soluciones.

-Examen crítico de las soluciones propuestas con sus ventajas y desventajas.

-Exposición de nuevas ideas; invención.

Comprobación de soluciones propuestas nuevamente; perfeccionamiento de resultados finales, repitiendo alguna o todas las etapas anteriores.

En 1957, POLYA (1992), How To Solve It, introdujo cuatro pasos en la resolución de problemas basados en observaciones que realizó como profesor de Matemáticas:

-Comprensión del problema. El que debe resolver el problema reúne información acerca del problema y pregunta: «Qué quiere (o qué es lo que se desconoce)? ¿Qué tiene (o cuáles son los datos y condiciones)?».

-Elaboración de un plan. El sujeto intenta utilizar la experiencia pasada para encontrar un método de solución y pregunta: «Conozco un problema relacionado? ¿Puedo reformular el objetivo de una nueva forma utilizando mi experiencia pasada (trabajando hacia atrás) o puedo reordenar los datos de una nueva forma que se relacione con mi experiencia pasada (trabajando hacia adelante)?». (Aquí es donde surge el insight.)

-Puesta en marcha del plan. El sujeto pone en práctica su plan de solución comprobando cada paso.

-Reflexión. El sujeto intenta comprobar el resultado utilizando otro método, o viendo cómo todo encaja y se pregunta: «Puedo utilizar este resultado o este método para resolver otros problemas?».

Los pasos de Polya son semejantes a los de Wallas en líneas generales. El paso de «comprensión» de Polya es similar a la fase de preparación de Wallas, su «elaboración de un plan» tiene algo de la fase de preparación de Wallas y tanto las fases de incubación como la de iluminación, y la «puesta en marcha del plan» y la «reflexión», están relacionadas con la verificación de Wallas.

DUNCKER (1945) intentó estudiar los estadios de resolución de problemas empíricamente, planteándoselo a un sujeto y pidiéndole que informara en voz alta el proceso de pensamiento a medida que iba pensando. El problema que Duncker utilizó fue el problema del tumor20. El registro que obtuvo de un sujeto típico llevó a Duncker a concluir que la solución de un problema avanza por estadios, de las soluciones más generales hacia las más específicas, y que el problema original es reformulado continuamente. Un ejemplo de cómo la resolución de problemas va desde soluciones generales a soluciones funcionales y a soluciones específicas es la solución tres para el problema del tumor. Por ejemplo (MAYER, 1986: 68), una solución general podría ser «evitar el contacto entre los rayos y los tejidos sanos»; una vez que los sujetos hayan pensado en esto por lo general buscarán diversas soluciones funcionales tales como «utilizar el camino libre hacia el estómago», o «insertar una pared protectora», o «retirar el tejido sano del camino» y por último llegarán a las soluciones específicas como «utilizar el esófago» o «insertar una cánula». Si ese plan general o esas soluciones funcionales fracasan, los sujetos deberán pensar nuevas soluciones genera les y funcionales tales como «baja intensidad de rayos en su paso a través de los tejidos sanos»; las ideas más específicas que sucedieron a esta idea general fueron «suprimir los rayos cuando se acercan al tejido sano y aplicarlos cuando se llega al tumon> (errónea), o bien «utilizar una lente focalizada» (correcta).

Al igual que Polya y otros psicólogos de la Gestalt, Duncker observó varios fenómenos básicos en el proceso de resolución de problemas:

-Solución funcional o valor. Los elementos del problema deben considerarse según su utilidad general o funcional en el problema y las soluciones generales o funcionales preceden a las soluciones específicas.

-Reformulación o recentramiento. La solución del problema incluye estadios sucesivos de reformulación o reestructuración del problema y con cada

solución parcial se crea un nuevo problema, más específico.

-Sugerencia desde arriba. Reformular el objetivo para volverlo más cercano a los datos; similar al «trabajo hacia atrás» de Polya.

-Sugerencia desde abajo. Reformular los clatos de modo que estén más estrechamente relacionados con el objetivo; similar al «trabajo hacia adelante» de Polya.

En 1966 Guilford expuso un modelo más detallado. Se basa en el modelo estructural tridimensional del intelecto desarrollado por él teniendo en cuenta principios cibernéticos.

SCHOFNFFL.D (1985b), Mathematical problem solving, entiende que el proceso de resolución no es lineal, como propone Polya, sino que supone caminos en zig-zag, con marchas hacia atrás y hacia adelante. Propone cuatro fases para la resolución de problemas:

-Análisis. Examinar casos particulares, simplificar el problema.

-Exploración. Sustituir las condiciones, introducir elementos auxiliares, considerar el razonamiento por contradicción, examinar problemas modificados...

-Ejecución. Aplicar la estrategia elegida.

-Comprobación. ¿Utiliza todos los datos pertinentes? ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables? ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?...

DF GUZMÁN (1991b), Para pensar mejor, sugiere que la resolución de un problema pasa por cuatro fases:

-Familiarización con el problema. Comprender el problema: ¿De qué trata?

¿Cuáles son los datos? ¿Guardan los datos relaciones entre sí?...

-Búsqueda de estrategias. Simplificación, particularización, ensayo y error, analogía, semejanza, reducción al absurdo...

-Desarrollo de la estrategia. Aplicación de la estrategia seleccionada.

-Revisión del proceso. ¿Cómo hemos llegado a la solución? ¿Por qué no la hemos alcanzado? ¿Podemos obtener otros resultados por el mismo método? ¿El mismo resultado por otros métodos?...

Como vemos, las estructuras de los modelos propuestos se apoyan, en la mayoría de los casos, en aquellos que les han precedido. No obstante, en esta visión de enumeración y análisis de las fases protocolarias para la resolución de problemas, echamos de menos una que no aparece y que cabría citar, a nuestro juicio, como primera: QUERER. Si no importante para el problema en sí, sí necesaria en la relación problema-sujeto. Querer resolver el problema significa «Voy a ver»; y esa expresión nace del deseo de introducirse en la curiosidad de observar lo que se obtiene al indagar, al afrontar la duda. «Voy a ver» es la aportación de iniciativa y el afán por descubrir. Sin esta fase, difícilmente se obtendrá éxito en las siguientes.

Capítulo **13**

Variables intervinientes en el estudio de la resolución de problemas

Se han estudiado variables que intervienen en la resolución de problemas, desde distintas vías. Estas variables se han clasificado en dos grandes grupos:

-Aquellas variables que se relacionan con el sujeto que resuelve el problema o que se relacionan con el problema en sí, o con la interacción problema-sujeto. A estas variables se las identifica con el nombre de variables intrapersonales.

-Aquellas variables que se relacionan con situaciones que el resolutor no puede controlar, así: metodología didáctica, disposición del/a profesor/a, características sociales. A estas variables las identificamos con el nombre de variables de situación.

Variables intrapersonales 13.1

Son variables intrapersonales:

-las cognitivas, entre las que destacamos el grado de memoria, el desarrollo del razonamiento lógico, la comprensión lectora, el grado de creatividad o la intuición del resolutor;

-los fundamentos matemáticos previos de la persona que resuelve el problema, la comprensión de las operaciones y su aplicación, su didáctica;

-las afectivas;

-las variables de formación de aprendizaje, es decir, las formas de aprender que rodean al alumno, así como el estímulo investigador, sus creencias sociales, sus dificultades y errores...

13.1.1 Variables cognitivas

❑ El lenguaje

Generalmente, en el desarrollo del aprendizaje de la resolución de problemas, se le da al alumno un enunciado y una pregunta para que llegue a un resultado, mediante un proceso de resolución. Se le aclara la necesidad de leer el enunciado y la pregunta, una y otra vez. Pero, el alumno no dispone de la necesidad, sino de la información de esa necesidad, y actúa sin ella21. Las variables sintácticas22 se subrayan significativamente en cualquier estudio de resolución de problemas. Cuando se presenta en el aula la redacción de una situación problemática, el alumno toma como modelo lingüístico lo que se expresa, lo retiene y lo asocia posteriormente con el contenido resolutorio de la situación. El rigor, la precisión y la claridad del lenguaje23 que se presenta al alumno son de exagerada importancia. Son muchos los problemas que se leen a lo largo de la actividad escolar, y son muchos los que contienen incorrecciones semánticas, sintácticas y matemáticas en sus enunciados. Se lee tanto lo que está bien como lo que está mal redactado y las interpretaciones no se sujetan tanto al sentido de su expresión, sino a la intuición de ese sentido. La fijación de ideas claras no puede tener un carácter fragmentario, sino un carácter sistémico, integral. Hay que elevar a una magnitud prioritaria la correcta formulación verbal del problema, poniendo excesivo cuidado en la presentación de su información y su pregunta, tanto en los que sean inventados por el profesor, como en los que se encuentren en cualquier material impreso.

Los problemas se suelen expresar verbalmente, ya de forma oral, ya de forma escrita. Se presenta, entonces, una comunicación. Comunicación que debe ser entendida por el que recibe el mensaje. En muchas ocasiones esto no

sucede así y la comunicación no se produce al ser ininteligible, debido, por ejemplo, a que el lenguaje utilizado en la situación problemática no es familiar al resolutor, o el resolutor, por su bajo dominio de la lengua, carece de ese vocabulario y de las estructuras gramaticales utilizadas. En edades tempranas (hasta los 8-9 años de edad) no es conveniente utilizar oraciones subordinadas, y las estructuras gramaticales deberían seguir la linealidad: nombre, verbo, objeto directo. «A los 5 años, los niños presentan amplias diferencias en cuanto al nivel de destrezas lingüísticas. Palabras y expresiones tales como "pesado", "ligero", "mayor que", "el más corto", y los conceptos a que hacen referencia, son ya familiares para algunos, pero no para muchos otros. Todos necesitan, en la primera etapa de su aprendizaje de las Matemáticas, desarrollar una comprensión de los tér minos y expresiones de ese tipo, a través de las actividades y las discusiones en el aula, y luego seguir progresando en el desarrollo del lenguaje matemático a lo largo de toda la enseñanza primaria» (COCKCROFT, 1985: párrafo 307).

Los alumnos que no advierten el significado de la situación problemática que se expresa tienden a asociar lingüísticamente la acción con la palabra, y desde la acción aplican, muchas veces erróneamente, la operación que intenta resolver el problema.

«Los alumnos cuyo dominio del lenguaje es vacilante, suelen soslayar sus problemas fijándose en el empleo de palabras como "más" o "menos", y considerarlas como "indicios verbales" que, en su opinión, reflejan la operación que se les pide. Sin embargo, con eso no resuelven el problema. Véanse los dos ejemplos siguientes:

-Janet tiene 5 peniques y John tiene 3 peniques más. ¿Cuánto dinero tiene John?

-Janet tiene 5 peniques y John 3. Averigua cuánto dinero tiene Janet más queJohn.

Ambos problemas contienen la palabra más, pero para resolver el primero hay que sumar, y para el segundo restar. En estos casos, el lenguaje sirve de puente entre la situación real (comparar monedas) y las operaciones aritméticas que han de realizarse para hallar la respuesta. No obstante, el lenguaje más bien estilizado que suele emplearse en los "problemas expresados en palabras" puede dificultar la evocación de las imágenes mentales precisas y la elección de la operación aritmética correcta, a los niños cuyas destrezas de lenguaje y lectura no sean muy sólidas. Por ello se ven obligados a recurrir a los "indicios verbales", y los profesores han de ser conscientes de ello» (COCKCROFT, 1985: párrafo 309).

Otro factor que hay que tener en cuenta es que el lenguaje escrito es posterior al lenguaje hablado, y en este sentido conviene abrir discusiones y debates, apoyados en acciones, antes que presentar por escrito problemas formalmente estructurados:

> «El lenguaje desempeña un papel fundamental en la formulación y expresión de las ideas matemáticas. Como afirmaba el informe del director de una infant school: `Hay que dedicar más tiempo a hablar.. Las ideas y hallazgos se transmiten mediante el lenguaje y se asimilan gracias a la discusión, pues es ésta, si se mantiene después de desarrollada la actividad, la que termina por centrar las ideas (Cockcroft, 1985: párrafo 306). En este sentido es también de interés el contenido del apartado 246: «Con el término discusión" queremos significar mucho más que las preguntas y respuestas que se intercambian durante la exposición del profesor. En el informe de la "Encuesta nacional sobre la enseñanza primaria" leemos que "en algunos casos, sobre todo en los alumnos mayores, podría haberse prestado más atención al empleo más preciso y unívoco de un lenguaje común para describir las propiedades de los números, tamaños, formas y posiciones". El informe de la "Encuesta nacional sobre la enseñanza secundaria" señalaba que se han infrautilizado las posibilidades que brindan las matemáticas para el

desarrollo de la precisión y sensibilidad en el uso del lenguaje". La capacidad de expresar con claridad lo que se piensa debe ser uno de los resultados de una buena enseñanza de las matemáticas, y sólo se desarrolla cuando se ha contado con la posibilidad de hablar sobre la materia, de explicar y debatir los resultados obtenidos y de verificar las hipótesis. Es más, los distintos temas que se abordan en la asignatura, tanto en primaria como en secundaria, deben presentarse y tratarse de un modo que ponga de manifiesto sus interrelaciones. Los alumnos necesitan ayuda para establecer estas relaciones, y dicha ayuda sólo puede prestárseles a través de discusiones extensas. Ni siquiera los que tienen un nivel de conocimientos alto pueden desenvolverse con facilidad en este terreno por su cuenta».

Desde el punto de vista epistemológico, PIAGET y BETH (1968: 354-356) afirman que la asimilación de las operaciones y estructuras lógico-matemáticas a las leyes de una actividad colectiva y lingüística lleva consigo dos interpretaciones posibles y distintas: 1) una interpretación semántica realista, pese al aparente nominalismo de la sintaxis tautológica: los conceptos y sus significaciones constituirían universales colectivos, cuyo valor provendría de la autoridad del grupo social; y tal es el sentido en el que Durkheim defendía frente a Lévy-Bruhl la universalidad de la razón y de la lógica, puesto que bajo las civilizaciones estaría la civilización, con sus leyes permanentes y su función normativa; y 2) una interpretación completamente nominalista, que lleva al convencionalismo, dado que lo propio de las relaciones sociales sería estatuir convenciones.

Desde estas dos vías de interpretación afirman Piaget y Beth que estamos en posesión de cuatro conjuntos fundamentales de datos acerca de las relaciones entre las conductas lógico-matemáticas del sujeto y la transmisión socio-lingüística: algunos resultados - poco numerosos, pero sólidos - de psicología animal (Kohts, W.Koehler, O.Kohler, etc.), todo el desarrollo del niño normal, los experimentos relativos al aprenclizaje de las estructuras

lógicas (Gréco, Wohlwill, Morf, etc.) y los concernientes a los sordomudos (P.Oléron, M.Vincent, F. Affolter). Por otra parte, estos cuatro tipos de resultados convergen enteramente y llevan a las conclusiones siguientes:

Con anterioridad a todo lenguaje, esto es, en el animal superior y el vástago humano durante los primeros meses, vemos cómo se constituye todo un esquematismo de la acción, esquematismo que incluye coordinación de esquemas, composición de relaciones. Así pues, antes del lenguaje se encuentran las raíces de las estructuras de clases, de relaciones y de números.

Ni el lenguaje articulado ni la transmisión socio-lingüística son necesarios para la formación de las estructuras operatorias elementales, ya que el sordomudo es capaz de efectuar seriaciones, clasificaciones, correspondencias numéricas, etc.

Podríamos interpretar que si no hay acción no hay expresión. Llevándolo al terreno de resolución de problemas sirve la idea de proceder de forma que los primeros problemas se apoyen en la manipulación, más que en la escucha de la situación y en la expresión escrita del algoritmo, o parta de un lenguaje visual que favorezca una dinámica de relaciones: «Indudablemente, el lenguaje consti tuye una condición necesaria para que se completen las estructuras de cierto nivel (hipotético-deductivas y proposicionales), pero no es condición suficiente de ninguna construcción operatoria. Por lo demás, lo mismo que la comprensión del lenguaje supone la inteligencia y su mecanismo operatorio, la formación misma del lenguaje, de la cual, por desdicha, sabemos tan poco, sería incomprensible sin una inteligencia previa» (PIAGET y BETH, 1968: 357).

❑ La memoria

Una vez que el alumno se ha enfrentado a un problema o conjunto de problemas y ha establecido una serie de conclusiones a partir de la semejanza o contraste de unas acciones, se hace necesario la conservación, mediante la

memoria, de aquellas apreciaciones percibidas. Estas acciones podrán ser reproducidas posteriormente en la resolución de problemas o reconocidas como modelo de estrategia en siguientes situaciones. Si es cierto que la repetición de actividades favorece la fijación en la memoria, también es cierto que no siempre se consigue con la suficiente plenitud y solidez. Hay que distinguir la reiteración de movimientos de la frecuencia de movimientos válidos. El hacer muchos problemas iguales de... división no enseña al alumno a hacer problemas, sino a reproducir esas situaciones-tipo y a reconocer... la división sólo en ese tipo de problemas. La memoria que se desarrolla es una memoria mecánica y el éxito del alumno dependerá de lo que es capaz de recordar en tanto a una reproducción de lo aprendido. La reproducción no puede ser finalidad en el aprendizaje de la resolución de problemas, sino una fase intermedia capaz de provocar un cambio cualitativo, una transformación, una exposición creativa.

La memoria está relacionada con el pensamiento y las formas de actividad derivadas de él de la misma manera que los resultados se relacionan con los medios. Se entiende por memoria el proceso de grabación, conservación y reproducción por el individuo de las experiencias que anteceden al presente. Implícito en la memoria está, entonces, qué hay que memorizar. El proceso de memoria es consecuencia del acontecer de unos sucesos, hechos o fenómenos en la interacción del sujeto con el mundo. Lo que no ha existido no ha podido ser memorizado, del mismo modo que lo que se ha memorizado es lo que ha sido «dado» en el entorno, «cómo ha sido dado». Un tratamiento psicológico de la memoria en la materia de conocimiento que nos ocupa sería equívoco.

No intentamos encontrar los fundamentos de sus bases fisiológicas, ni exponer puntos teóricos del tratado de ésta; asentarla como parte del proceso de pensamiento en la resolución de problemas dirige el trabajo de este estudio. Por un lado, la importancia de la memoria para el aprendizaje de la resolución de problemas; por otro, la importancia de la resolución de

problemas en el desarrollo de la memoria como aprendizaje.

> «La memoria a corto plazo desempeña un importante papel en las tareas en las que han de considerarse simultáneamente diversos atributos o unidades de información, como ocurre en los cálculos mentales, la resolución de pro blemas, la comprensión de conceptos complejos o el seguimiento de una explicación o debate; en otras palabras, en la mayor parte de las tareas de aprendizaje. Ahora bien, para llevar a cabo estas labores es preciso recurrir a información almacenada en la memoria a largo plazo. De las investigaciones efectuadas se deduce que los datos se almacenan mejor en esta última si se asimilan de tal forma que pasen a formar parte de una red de unidades asociadas y relacionadas que se apoyan mutuamente. Un buen ejemplo de esto lo constituye el hecho de que muchos niños cuya capacidad para recordar datos numéricos parece escasa, sean capaces, debido a su interés o conocimientos sobre temas deportivos, de recordar sin dificultad resultados de partidos de fútbol o de cricket jugados semanas o incluso meses antes» (CocKCROFT, 1985: párrafo 235).

VELASCO (1996: 55) expone que «la memoria a corto plazo es la responsable de mantener y procesar la información requerida en los problemas de razonamiento. Cuantos más complejos sean los problemas, más saturaremos la memoria de trabajo y más dificultad tendremos para resolverlos. HITCH y BADDELEY (1976) señalaron que un aumento de la carga de la memoria de trabajo perjudica los problemas de razonamiento verbal, dependiendo de su complejidad lingüística».

Así expresado, parece que el aprendizaje de la resolución de problemas depende de la capacidad de memoria que un individuo tenga para retener una serie de acciones «recetarios», pero esto es tan impreciso como real. La memoria que hace avanzar la construcción del conocimiento de las situaciones problemáticas no es la memoria mecánica sino la lógica, que

presupone preliminarmente el trabajo del pensamiento, recordando el sentido de la actividad que se aprende, y no la actividad; desglosándola, dividiéndola, analizándola, distinguiendo sus partes más importantes, la esencialidad de las relaciones que se dan y la extensión de su dinamismo. En este sentido, el lenguaje que se utiliza en la expresión del problema requiere una atención especial, debido a que una situación se recuerda mejor en tanto más relacionada esté con el entorno en el que se desenvuelve el sujeto. Al respecto, MAYER (1986: 275) revela, a partir de los estudios de PICHERT y ANDERSON (1977), que el recuerdo de un pasaje por unos sujetos estaba influenciado por sus perspectivas. De modo que el patrón de memoria dependía tanto de la información que había en el pasaje como de la perspectiva del lector.

La memoria incide en la resolución de problemas como fuente de conocimiento más que como hábito. Tanto en la invención de problemas como en la resolución de éstos, los alumnos han tenido que tener experiencias de la validez de la memoria verbal-lógica. Poco serviría, como proceso de pensamiento, si se pide al alumno que invente un enunciado a partir de una pregunta dada y éste tratase de localizar la forma literal textual de un problema realizado anteriormente. Cuando recuerdan el «sentido» son capaces tanto de expresar con sus propias palabras un enunciado como de resolver con sus propias estrategias un problema, extendiendo los conceptos como medio nato de construcción de nuevos significados.

❑ El razonamiento lógico

La utilización de estructuras lógicas correctas de pensamiento es necesaria en la resolución de un problema. La referencia al razonamiento lógico se hace desde la dimensión intelectual que es capaz de generar ideas en la estrategia de resolución. Esas ideas serán los razonamientos que indicamos como necesariamente lógicos, en tanto a que son inferidos de unas premisas expresadas en el enunciado24. Esta expresión fotográfica resume la idea que

se pretende comunicar al hacer intervenir en los problemas estructuras lógicas de composición y resolución, alejándonos de un logicismo de las situaciones problemáticas, o un estudio de éstas desde los fundamentos de la lógica. Verdad, no significa que el interés no quede abierto a la investigación. En este sentido son interesantes: GUÉTMANOVA (1989) y (1991); KNELLER (1969); FREGE (1974); EINGERMANN (1972); AMMERMAN (1965) o en la actividad que dirige una situación problemática planteada. «No hay ningún truco mágico gracias al cual unos niños incapaces de reflexionar se convertirán, al llegar a adultos, en ciudadanos que piensen. Los medios tienen que ser consistentes con los fines o, como subrayó Kant, quien quiere el fin quiere los medios. Si queremos adultos que piensen, debemos educar niños que piensen» (LIPiMAN, 1987: 7). Las situaciones problemáticas invitan a la reflexión cuando subrayan la ausencia de arbitrariedad en el modo de actuar y permiten la transformación de un conocimiento en otro, desconocido anteriormente, mediante razonamientos lógicos con instrumentos matemáticos.

Según Dewey (en KNEI.I.ER, 1969: 49), «todo razonamiento es una respuesta a alguna dificultad que no puede ser superada mediante el instinto o la rutina».

La referencia al razonamiento lógico se hace desde la dimensión intelectual, que es capaz de generar ideas para las estrategias de resolución.

> «Todos los alumnos con escasa capacidad. Se ha demostrado que todos se caracterizan por un insuficiente desarrollo del componente lógico-verbal de la actividad intelectual. Aunque es cierto que un elevado nivel de desarrollo de dicho componente no determina infaliblemente la "habilidad" matemática, sin embargo representa una condición necesaria, y que un bajo nivel de desarrollo del componente lógico-verbal del pensamiento determina dificultades para la comprensión de las matemáticas» (VIGOTSKY, 1973: 254).

Esas ideas serán los razonamientos que indicamos como necesariamente lógicos, en tanto que son inferidos de unas premisas expresadas en el enunciado o en la actividad que dirige una situación problemática planteada. Estas ideas lógicas se considerarán lógico-matemáticas cuando su veracidad pueda ser de mostrada mediante procedimientos operativos propios de la Matemática, a estas edades. Un pensamiento que no ha pasado por la fase lógica no puede llegar a la fase matemática. Muchas veces los sujetos se dejan llevar por aspectos superficiales y no lógicos en la selección de información de un problema.

> «Una de las mayores causas de error en el razonamiento humano son los diversos factores que inducen a los sujetos a procesar la información de los problemas de una manera selectiva. Tal selección puede surgir en el proceso de formación de las representaciones mentales iniciales de la información presentada en el problema, o en la forma en que posteriormente dichas representaciones son procesadas para poder llegar a una solución. Así, hay sujetos que por cualquier razón, extraen fácilmente los aspectos lógicamente relevantes de la tarea, que les conducen a un proceso que termina en una solución correcta. Otros, por el contrario, consideran aspectos irrelevantes del problema, lo que les llevará a cometer errores. En el razonamiento silogístico, por ejemplo, verá el denominado "efecto atmósfera", que intenta explicar el hecho de que los sujetos se `dejen llevar"por aspectos superficiales, y no lógicos, de la tarea. El procesamiento erróneo de información irrelevante (como es la atmósfera de las premisas) conducirá a conclusiones erróneas» (VELASCO, 1996: 52).

El desarrollo del pensamiento es resultado de la influencia que ejerce el estudio en la escuela. Por ello, la escuela debe proponer desafíos intelectuales para no descuidar el desarrollo del razonamiento lógicos.

Estas consideraciones están tan relacionadas con el profesor como con el

alumno:

> «En razón de esta aparente falta de interés en las operaciones lógicas, efectuadas en el aula, la enseñanza se halla orientada mucho menos intelectualmente de lo que podría estarlo. El maestro no desafia suficientemente las mentes de sus alumnos, porque no conoce las técnicas lógicas del razonamiento, la exposición y el debate, las cuales han sido desarrolladas con el propósito específico de movilizar y orientar los poderes intelectuales. Cuando un estudiante interviene en clase, el maestro, demasiado frecuentemente, no puede extraer todo el provecho posible de esta acción, porque no comprende la operación lógica que el alumno está realizando, aun cuando lo haga de manera imperfecta, o la respuesta que esa operación requiere para ser completada. También el estudiante es trabado en su desarrollo intelectual al no reconocer las operaciones lógicas que realiza, o debiera realizar, al apren der las materias de estudio e intervenir en el diálogo que tiene lugar en el aula. Igualmente lo traba el no saber cómo evaluar las conclusiones de otros. Por lo tanto, aunque retiene una gran variedad de información y sabe, dentro de ciertos límites, resolver los problemas planteados en áreas de estudio particulares, el arte del pensamiento claro, relevante y consistente, lo elude con mucha frecuencia. La manera exacta de enseñar este arte es un tema sujeto a debate en el campo de la educación. Según una de las escuelas, ciertas operaciones mentales forman parte del pensamiento lógico en cualquier materia de estudio, y hay normas que pueden usarse para evaluar los producto» (KNELLER, 1969: 113-114).

Los procesos deben ser consecuentes con los resultados. Los medios, como escribe Lipman, tienen que ser consistentes con los fines:

> «No hay ningún truco mágico gracias al cual unos niños incapaces de reflexionar se convertirán, al llegar a adultos, en ciudadanos que piensen. Los medios tienen que ser consistentes con los fines o, como subrayó

Kant, quien quiere el fin quiere los medios. Si queremos adultos que piensen, debemos educar niños que piensen» (LIPMAN, 1987: 7).

Todos los tipos de razonamiento son necesarios en la resolución de problemas:

1. El razonamiento deductivo26

Según Aristóteles, la metodología de las ciencias deductivas se caracteriza por tres postulados:

1. El postulado de deductividad. Toda ciencia demostrativa, C, se basa sobre cierto número de principios, entre los cuales cabe distinguir los conceptos primitivos y las verdades primitivas (o axiomas). Todo concepto no primitivo perteneciente a C debe ser definido por medio de conceptos primitivos, y toda verdad no primitiva incluida en C debe ser demostrada a partir de los axiomas valiéndose de un razonamiento lógico.

2. El de evidencia. Los conceptos primitivos de C han de presentar tal grado de claridad que sea posible comprenderlos sin que necesitemos definición alguna; e igualmente, los axiomas de C han de presentar un grado tal de evidencia que nos sea posible aceptarlos como verdaderos sin necesidad de demostración.

3. El de realidad. Es preciso que los conceptos y las verdades de C se refieran a cierto campo de entidades reales, que constituirá, precisamente, el objeto propio de la ciencia C.

El núcleo fundamental de este enfoque son los silogismos que consisten en dos premisas y una conclusión. Existen tres tipos de silogismos:

a)Categórico (Todos los A son B; Todos los B son C; Luego todos los A son C).

b)Lineales (A es mayor que B; B es mayor que C; luego A es mayor que C).

c)Condicionales (Si p entonces q; p es verdadero, luego q es verdadero).

2. El razonamiento inductivo

Consiste en llegar a un juicio universal a partir de casos particulares. Se denomina inducción completa el razonamiento en que la conclusión universal sobre una clase de objetos se hace partiendo del estudio de todos los objetos de esta clase. La inducción matemática es uno de los métodos más importantes de demostración: 1) Que la propiedad A tenga lugar cuando n = 1; 2) Si un número natural n tiene la propiedad A, entonces el número natural n + 1 también la tiene. De lo que se concluye que cualquier número natural tiene la propiedad A.

3. La analogía

Es un razonamiento sobre la pertenencia a un objeto de un determinado indicio, a base de la homología de indicios sustanciales con otro objeto. Existen tres tipos de analogía: a) rigurosa, cuando la conclusión es cierta; b) no rigurosa, cuando la conclusión es probable; c) falsa, cuando la conclusión no es cierta. STERNBERG (1979) determinó que un problema de analogía puede dividirse en los siguientes componentes principales (se considera la analogía: rojo es a stop como verde es a pasar):

-Codificación. Cada uno de los cuatro ítems-estímulo es traducido a una representación interna. Por ejemplo, «rojo», «stop», «verde» y «pasan> están representados en la memoria.

-Inferencia. Se halla una regla que relacione el término A de la analogía con el término B.Por ejemplo, una luz roja de tránsito es señal de detenerse.

-Graficado. Se halla una regla de orden superior que relacione el término A

con el C.Por ejemplo, rojo y verde son colores de señales de tránsito.

-Aplicación. Se aplica una regla a C para generar un término final D.Por ejemplo, verde es señal de paso. Si esta respuesta concuerda con la respuesta dada para el término D, la respuesta a la analogía es sí; de lo contrario es no.

-Preparación-respuesta. Este paso incluye todo el tiempo restante utilizado para resolver la analogía y emitir la respuesta.

Observemos que en todo problema existen conceptos, y juicios que afirman o niegan algo. A partir de esos juicios se pueden obtener conclusiones que están implícitas en el problema. A esas conclusiones se les llama inferencias y se obtienen mediante razonamiento deductivo, inductivo o analogía.

En todo problema existen relaciones lógicas, que se presentan normalmente mediante silogismos; en ocasiones, difíciles de ver.

(Premisa) Todas las personas mayores de 18 años pueden votar. (Antecedente)

(Premisa) Julio puede votar. (Consecuente)

(Conclusión) Julio tiene más de 18 años.

En las premisas podemos encontrar cuantificadores y constantes lógicas. Son constantes lógicas: La conjunción (y), la disyunción (o), la negación, la implicación (Si, entonces...), la equipolencia (Si y sólo si...). Son cuantificadores: Todos, algunos, ninguno, uno, este...

-Relaciones que encontramos en los problemas.

-Relaciones conceptuales (comprensión verbal).

-Relaciones lógicas (razonamiento).

-Relaciones matemáticas (comprensión de conceptos matemáticos, conocimiento de técnicas, destrezas y modelos).

Estas relaciones se presentan de un modo DIRECTO o de un modo INDIRECTO: «Un río tiene un caudal de 236 litros por minuto. ¿Cuántos litros de agua aportará ese río al mar en un día?».

-Relaciones directas:

•Conceptuales: río, caudal, litros por minuto.

•Matemáticas: 236 litros por minuto.

•Lógicas: El caudal de un río en un minuto de tiempo es X. Un día representa una medida de tiempo superior a un minuto.

El caudal de un río en un día es superior a X.

-Relaciones indirectas:

•Conceptuales: aportará al mar.

•Matemáticas: día (equivalencia a minutos: 60 x 24).

•Lógicas: El caudal de un río es de 236 litros por minuto. Un día equivale a 1.440 minutos.

El caudal de un río en un día es de 1440 veces 236 litros.

En el siguiente problema se observa la necesidad de seguir razonamientos condicionales: «En una diana se pueden obtener 100, 75, 50 o 25 puntos. Dos niños A y B juegan con 3 dardos cada uno. El que más puntos obtenga gana. El total de puntos equivale a la suma de las puntuaciones obtenidas con los tres dardos. El que gana se lleva el regalo. El regalo se lo ha llevado A. ¿Cuántos puntos ha obtenido cada niño en total?».

$$A - 50 - 25 - ? = ?$$
$$75 - 50 - ? = ?$$

En muchos problemas existen cadenas de silogismos, podríamos decir que esto es habitual en la Matemática si se entiende como una dinámica de relaciones lógicas. A las cadenas de silogismos se les llama polisilogismos. Éstos se presentan en la mente del alumno en aquellas ocasiones en las que el descubrimiento de un concepto a partir de un material forma parte en la metodología didáctica para el acceso intelectual al conocimiento.

❑ La creatividad

Se olvida con frecuencia que la creatividad es una faceta de la inteligencia que debe formar parte de las estrategias de resolución de problemas. Como su desarrollo comprende la esencia de objetivos fundamentales, el marco de movimientos creativos se debe desempeñar en el contexto con el que la creatividad debe estar familiarizada. Los vínculos y relaciones generales entre los conceptos matemáticos y las situaciones del entorno social en el que el alumno despliega su actividad, se deben tanto a la comprensión de los conceptos como a la extensión creativa de éstos.

> «El modo más rápido y directo de estimular la creatividad consiste en formular preguntas. Interrogar es provocar estimular aguijonear y ensanchar. Por su naturaleza una pregunta exige una respuesta. [..] El punto final no provoca; no son los juicios, sino los signos de interrogación los que abren la mente» (NOONE, 1996: 73).

Ribot, en su obra Ensayo sobre la imaginación creadora nos aporta dos procesos creativos. El mismo esquema de proceder de la imaginación creadora ante cualquier planteamiento, sin aludir en ningún caso a Ribot, ha sido replanteado de nuevo por Dewey en 1933, por Poincaré en 1946, por G.Wallas en 1926. RIBOT (1901) expuso dos procesos creativos respecto al pensamiento de las personas, ya analítico, ya intuitivo: El primero lo siguen

las personas de pensamiento analítico y lógico, y el segundo sería el de las personas más intuitivas. Si estamos de acuerdo en que su comportamiento es diferente al enfrentarse con los problemas, hemos de admitir también que sea distinto su proceder al pensar creador.

-Analíticos:

- •11. fase: Idea previa (principio de incubación).
- •21. fase: Invención o descubrimiento.
- •3a. fase: Comprobación o aplicación.

-Intuitivos:

- •1a. fase: Preparación general inconsciente.
- •2a. fase: Idea. Inspiración. Erupción o comunicación.
- •Y. fase: Desenvolvimiento o construcción.

Este planteamiento del proceso creativo se adelanta sesenta años a la propuesta de los investigadores americanos de manera más argumentada y detallada.

El estudio comparativo de las fases realizado por DE LA TORRE (1984: 44), advierte de forma clara la diferencia entre los dos procedimientos: «Si comparamos los dos tipos de procesos observamos algunas diferencias. En el primer procedimiento la idea está mucho más separada del descubrimiento que en el segundo. La idea reclama la atención y toma carácter de fijeza empezando el período de incubación que puede durar mucho tiempo. Sin embargo, la segunda fase es más breve: el momento del hallazgo. El segundo procedimiento se adecua más a personas intuitivas, denominándolo `Abreviado", ya que son movidos 11 por el golpe brusco de la inspiración".

La tercera fase es corta en el primer pro ceso, pues se reduce al perfeccionamiento y comprobación del resultado; quienes sigan el segundo proceso, han de pasar: "de la idea entrevista a la realización concreta"27 alargándose más el momento de construcción o desarrollo de la idea relámpago.

Ambos procedimientos responden a la distinción que suele ofrecerse entre la imaginación intuitiva espontánea, y la imaginación combinatoria, reflexiva, analítica. Aquélla abunda más entre los artistas; la última entre los investigadores y científicos. Diríamos que se trata de un doble proceder que raramente se da de forma pura en unos y otros».

Habitualmente, según lo que hemos podido observar desde algunas investigaciones breves y la comunicación con un amplio círculo de profesores/as, respecto a la resolución de problemas matemáticos los procedimientos de los niños no se definen ni por analíticos, ni por intuitivos, debido a la falta de ideas que pueden generar los problemas que se presentan en el aula. Suelen ser problemas cerrados, que esperan de una operación o conjunto de operaciones para ser resueltos, sin desarrollar potencialidad alguna de tipo creativo y, por tanto, empobreciendo las relaciones y la extensión de los conceptos.

Autores como BFAUDOT (1973), MARÍN (1974), TORRANCF (1976), LODUCHOWSKI (1982) y GUII,FORD (1983), han llamado la atención sobre la creatividad como técnica poderosa y al alcance de cualquier maestro.

TORRANCF (1976), para ayudar al maestro en su tarea educativa, señala una serie de conceptos que compensen las tareas de la cultura. Entre las habilidades que han de enriquecer al maestro indica:

-Reconocer y aceptar las potencialidades. Para ello, preocuparse de ano- tar en clase las diferentes manifestaciones de comportamiento creativo.

-Ser respetuoso con sus preguntas e ideas. «Una de las exigencias del comportamiento creativo es la capacidad de admirarse, de quedar perplejo, encontrar fallos en nuestros conocimientos y responder constructivamente» (TORRANCE 1976: 190).

-Plantear cuestiones incitantes. Es lamentable que el 90% de las preguntas formuladas por el maestro exijan una respuesta de información. Las preguntas son anzuelos para atraer el interés, motivar y despertar la creatividad.

-Reconocer y valorar la originalidad.

-Desarrollar la facultad de elaboración animando a llevar a su ejecución completa cualquier actividad o plan de clase.

-Suspensión de la evaluación en la práctica y en la experimentación. Este principio resulta básico quedando ya comprobado que el enjuiciamiento prematuro retrae de la realización.

-Promover lectores creativos: Buscan nuevas relaciones, sintetizan, reclefinen, transforman la información recibida en nuevas aplicaciones.

-Prever el comportamiento.

-Guiarse por experiencias planeadas de antemano. El desarrollo mental es diferente cuando los niños están prevenidos que cuando suceden los hechos ocasionalmente.

-Buscar la verdad con métodos adecuados.

-Habilidad para la solución creativa de problemas.

❑ La intuición

La intuición forma parte de la actividad creadora. Es difícil explicar la creación del tipo que sea si rechazamos la intuición. La intuición tiene un carácter cualitativo, no cuantitativo. No se puede intuir el resultado de una operación o la solución de un problema. Tal conocimiento, supone que se puedan exigir ideas y su explicación - como elección válida-, sin confundir el porqué de su procedencia con el para qué de su nacimiento.

Primeramente, según PIAGET (1968: 277, 288), se encuentran las intuiciones empíricas relativas a propiedades físicas de los objetos o a propiedades psicológicas proporcionadas por la experiencia introspectiva vivida y las intuiciones vinculadas a acciones u operaciones, ya se refieran éstas a objetos o se desliguen de ellos más o menos completamente (ejemplos: las intuiciones del orden, el encajamiento sucesivo, la correspondencia término a término, etc.). Estas intuiciones operatorias, que son las únicas que ofrecen interés desde el punto de vista matemático, están sujetas a una segunda dicotomía: la que opone las acompañadas de una representación por imágenes, de naturaleza homogénea a la de las operaciones en juego (intuiciones geométricas) a las intuiciones que no posean semejante propiedad (operaciones que versen sobre objetos discretos). Ahora bien, como cuando se habla de la intuición geométrica se suele pensar más en su carácter imaginativo que en su aspecto operatorio, vamos a introducir una nueva distinción dentro de las intuiciones operatorias: la que separa la intuición por imágenes (o simbolizante) de la intuición operatoria. Esta última dicotomía, pues, no prolonga la anterior, sino que afecta a los mismos elementos, pero desde otro punto de vista: en el caso de las intuiciones espaciales, la intuición simbolizante es homogénea con la operatoria, mientras que en el de las intuiciones referentes a objetos discretos, la intuición simbolizante es de naturaleza casi individual.

Las intuiciones empíricas evolucionan en función de los progresos de la experimentación.

Las intuiciones operatorias competen a los mecanismos mismos de la inteligencia, y pasan por tres grandes estadios de desarrollo: intuiciones vinculadas a la acción material sobre los objetos, luego a la acción interiorizada en operaciones (pero todavía aplicable a los objetos), y por fin a operaciones independientes de toda posible acción. Filosofía y psicología se funden aquí para dar una explicación objetiva del flujo de la intuición2s. Las intuiciones simbolizantes evolucionan de manera subordinada a las operatorias, que son las únicas que confieren movilidad y adecuación relativa a las imágenes, en particular a las espaciales. En esta fase encontraríamos un estado de comparación desde el que Descartes argumenta la intuición como parte vinculante al razonamiento matemático29.

El papel propiamente cognoscitivo de la intuición, aun cuando es efectivo a todos los niveles y se mantiene fundamental desde el punto de vista de la invención, disminuye (en sentido relativo) a lo largo del desarrollo: las intuiciones empíricas ceden el paso o se someten a las técnicas de experimentación estricta; las simbolizantes se subordinan cada vez más a las intuiciones operatorias; en cuanto a éstas, si bien tienen un desarrollo ilimitado, esto les sucede gracias al mecanismo de la «abstracción reflectora». Ahora bien, como vamos a ver, lo propio de ésta es afinar incesantemente las técnicas deductivas de acuerdo con un doble proceso, simultáneamente progresivo y retroactivo; de donde procede una tendencia interna a la formalización que, pese a que jamás pueda cortar todo contacto con sus raíces intuitivas, limita relativamente cada vez más el dominio propio de la intuición (en el sentido de pensamiento operatorio no formalizado).

13.1.2 Variables según la formulación del problema

El conjunto de variables que aportan éxito a la resolución de problemas es muy extenso. Según la formulación del problema, podemos agrupar estas variables en tres clases (Rico, 1995: 24-25): Variables dependiendo de la información que expresa el problema, variables que dependen de la pregunta

que plantea y variables de la operación que lo resuelve.

1. Según la información que proporcionan

Transmisión de la información. Acción, representación, expresión verbal y expresión simbólica.

Datos numéricos de la información. Contándolos o midiendo, expresión simbólica o verbal, números o resultados de medidas, tamaño de los datos, orden en que aparecen los datos e inclusión o no de datos superfluos.

Relación entre los datos de la información. Relación explícita o tácita, relación por descripción o acción, relación de tipo lógico (unión, intersección, etc.) y encadenados o independientes.

Contexto de información. Situación más o menos real, estilo de la redacción, extensión, connotaciones que puedan implicar participación o no de los individuos en su obtención y vocabulario.

2. Según la pregunta planteada

Tipo de información que se pide. Dato exacto o aproximado, gráfica de datos o dato de un gráfico, elección de entre varias respuestas, relación entre los datos y acción para conseguir un objetivo.

Estructura de la pregunta. Combinación (relación estática entre los datos), cambio (relación dinámica), comparación (cuánto más, etc.), igualación (cuánto falta para, etc.) y tasa (en problemas de estructura multiplicativa).

Posición y extensión de la pregunta. Situación dentro del enunciado, extensión (todo o parte del enunciado) y única o varias dirigidas a una cuestión final.

Sentido de la pregunta. Si la pregunta está dentro de las cuestiones que el

individuo puede presentarse, si la pregunta da, o no, respuesta a una necesidad real y si el dato que se obtenga se integra, o no, de modo coherente en el contexto informativo.

3. Según la operación que lo resuelve

Operaciones implicadas. Operaciones para cambio de unidades, operaciones para obtener el resultado, algoritmos empleados (o calculadora), cálculo mental y conveniencia o no del redondeo de los datos. En ocasiones los alumnos no encuentran relación entre cómo se ha aprendido el algoritmo de una operación y la aplicación lógica de ese algoritmo a diversas situaciones. En este sentido se expresa el informe COCKCROFT (1995, párrafo 298): «Las destrezas de cálculo escrito y mental se basan en unos conceptos fundamentales que precisan ser desarrolla dos mediante actividades tales como la medición, las compras, el empleo de aparatos y otras muchas. Entre esos conceptos se cuentan las operaciones de la suma, resta, multiplicación y división y sobre todo, la idea, ciertamente crucial, del llamado valor de posición (por ejemplo, que el 2 significa 2 unidades en el número 52, 2 decenas en el número 127 y 2 centenas en el número 263). La comprensión del valor de posición permite emplear los hechos numéricos almacenados en la memoria a largo plazo, para la realización de cálculos en los que intervienen números mayores; así, el conocimiento de que 14 - 8 = 6 puede emplearse para calcular 140 - 80, o bien 54 - 8 [...]».

Conjunto numérico. Conjunto donde se realizan las operaciones, subconjunto dentro del cual aparecen los datos, pertenencia o no del resultado al mismo subconjunto que los datos y empleo o no de un único sistema de símbolos.

Sentencia abierta que proporciona el resultado. Tipo de sentencia (a + b =?, a +? = c, etc.), número de sentencias, orden y resolución de las sentencias, sentencias complejas y posibilidad de que varias sentencias produzcan el mismo resultado.

Recursos auxiliares. Empleo de material, apoyo gráfico, empleo o elaboración de tablas o esquemas, empleo de fórmulas, tanteo del resultado y verificación de resultados.

Estas variables están muy relacionadas con las variables en la formación del aprendizaje, donde la propuesta de actividades para el aprendizaje de la resolución de problemas no tiene en cuenta aspectos de notorio interés. Nesher critica el hecho de que los problemas que se presentan no están dados en lenguaje ordinario y no tienen relación con las experiencias de los niños. Son estereotipados en su estilo y en su interpretación semántica y describen objetos y acontecimientos que no tienen ninguna realidad ni parecido con el mundo real. Respecto a la aplicación de operaciones no se respetan las etapas para su aprendizaje, comenzando por la enseñanza del algoritmo; cuando esto es punto de llegada, y no, punto de partida: En primer lugar debemos partir de acciones que permitan una construcción mental de las distintas operaciones para llegar a intelectualizarlas. En segundo lugar, hay que abstraer los contextos en los que se da cada operación, generando modelos universales. La utilización de estos modelos daría paso al tercer estado, que recoge la expresión simbólica de la operación, así, por ejemplo 5 - 3 = 2, representa todos los modelos de situaciones que puedan generar esa expresión simbólica. En cuarto lugar, tendríamos las tablas de cada operación para agilizar las destrezas, que se construyen desde el descubrimiento y aplicación de principios aprendidos anteriormente. La quinta etapa es la etapa algorítmica que permite realizar cualquier cálculo, independientemente del tamaño del número. A estas etapas hay que añadir la distinción que FREUDENTHAI, (1973: 170-171) señala de cuatro accesos al concepto de número: El «número de calcular» en el sentido algorítmico y operativo se distingue del «número de medin> o el «número de contar<30

Número de la numerosidad. Quizá el número de la numerosidad sea anterior genéticamente al número de contar. Hay animales que reconocen numerosidades pequeñas aunque, ciertamente, no pueden contar. El niño, sin

embargo, aprende a contar desde tan pronto que inicialmente no se da cuenta de que contar puede servir para determinar la numerosidad de un conjunto. Al mismo tiempo, sin embargo, como cualquiera puede verificar fácilmente, identifica numerosidades pequeñas independientemente del contar, en particular si están dispuestas según ciertos patrones. El número de la numerosidad se formaliza mediante la potencia o cardinalidad de los conjuntos; su apoteosis es los cardinales infinitos.

Número de medir. Si se mide una magnitud, ésta se agota o se intenta agotar mediante copias de una unidad, de la misma manera que una vasija se vacía con una cucharilla. Como se hace al pesar o al manejar dinero, múltiplos de la unidad pueden ayudar en el proceso de medir. Como sucede en una regla graduada, se pueden tener marcadas de antemano copias de la unidad, pero una disposición lineal no es necesaria para medir: un área puede ser agotada en órdenes variados mediante unidades de área. El que el proceso de medida no agote completamente la magnitud conduce a la división con resto, por una parte, y, por otra parte, a las fracciones, si la unidad se divide. El número de medir se formaliza en el cuerpo de los racionales, a partir del cual se obtiene los números reales mediante procesos de carácter infinito. Una contrapartida de las magnitudes que pueden ser medidas una por otra se encuentra en los campos no-arquimedianos.

Número de calcular. Éste es el aspecto algorítmico. El número se concibe operacionalmente, gracias a las reglas según las cuales el usuario juega con él. Se formaliza en el enfoque axiomático. Los números aparecen como elementos de anillos y cuerpos que se fijan axiomáticamente.

13.1.3 Variables en la formación del aprendizaje

Dependiendo de lo que entendamos por resolución de problemas, así actuaremos en la formación de su aprendizaje. Actualmente, tienen vigencia las teorías que se apoyan en el descubrimiento y la acción investigadora del sujeto. Los desafíos a los que se enfrenta permiten que el alumno construya la

comprensión de los conceptos y la validez del aprendizaje. La figura del alumno como receptor de conocimientos no se admite en la teoría, pero, tristemente, sigue siendo habitual en la práctica actual. La invención, la búsqueda de relaciones, la contrastación de ideas, la seguridad y confianza en sí mismo, la aceptación de sus conclusiones, la exploración de distintas vías, la creación de reglas... son variables que forman parte de la formación del aprendizaje.

> «Al finalizar una clase de arte, el niño puede decir `Este es el dibujo que he hecho". Al finalizar una clase de inglés: `Esta es la historia que he escrito". ¿Qué se dice después de una clase de Matemáticas? ",,He hecho los cálculos correctamente?" Nos gustaría que fuese: "He inventado una regla con números" o `Aquí tienes un patrón que yo he observado'. (SAWYER, 1992. En ABRAN- TES, P, 1996: 10-11).

Para conseguir una calidad en la formación del aprendizaje se hace necesario diversificar las variables implícitas en dos vías: Una que se corresponde con el sujeto que realiza el aprendizaje; otra que se corresponde con la materia de estudio tratada. En la primera vía tendríamos las variables afectivas, y en la segunda, las aportaciones de formación, externas al sujeto, pero identificadas en sus dificultades, errores y bloqueos.

❑ Variables afectivas

Dimensiones afectivas se tienen ya en cuenta en la resolución de problemas: interés, confianza, perseverancia, complacencia, motivación... STFRNBERG (1983) sugiere que un alumno motivado aprende mejor que otro sin motivación, a igualdad de habilidad, las diferencias de motivación pueden dar cuenta de gran parte de las diferencias observadas en la realización de problemas. Para NiCHOLIS (1983) la motivación ideal resulta cuando viene dada por la tarea a realizar, aunque también admite que puede venir dada por el propio yo resolutor, o por una fuente externa; éstas ya no son tan ideales como la primera.

La tensión que provoca la resolución de problemas en el resolutor se admite actualmente, también como dimensión afectiva. MCLEOD (1985) y KANTOWSKI (1977) argumentan este hecho, asegurando el aspecto dicotómico al expresar que cuando la respuesta es alcanzada, sea válida o no, la tensión es sustituida por una relajación que hace infrecuente el deseo de revisar el proceso efectuado. MCLEOD (1985) destaca factores afectivos en la resolución de problemas (en BLANCO NIETO, 1993: 74):

-Magnitud y dirección en la resolución de problemas. Las influencias afectivas varían en intensidad y en dirección (positiva o negativas). En la resolución de problemas en la enseñanza primaria suele predominar las reacciones negativas sobre las positivas. Suelen ponerse de manifiesto los errores de los alumnos, olvidándonos en ocasiones de alabar a los que tienen resultados positivos.

-Duración de la emoción. Es importante controlar, en referencia al tiempo, la sensación de frustración que aparece en el resolutor de problema cuando está bloqueado. Mantener esta situación en alumnos que están aprendiendo determinados conceptos o procedimiento puede llevarles a una actitud negativa más duradera y persistente.

-Conocimiento y control de sus propias emociones. En este caso es bien conocida la reacción de nuestros alumnos a abandonar al primer fracaso en el primer intento. Esta actitud condiciona la predisposición de los resolutores ante los problemas, por lo que controlar estas reacciones debe ser un paso importante en la enseñanza de las Matemáticas.

Cuando un alumno está resolviendo un problema pueden aparecer emociones negativas como fruto de las dificultades. Sin embargo, cuando el problema está concluido y lo revisamos después de comprendido por los alumnos, podemos observar en éstos más emociones positivas derivadas de su conocimiento de la actividad.

❑ Variables en el aprendizaje de la materia de estudio

Los autores actuales sobre el campo de la formación del aprendizaje matemático advierten en sus escritos la validez de lo que Dewey había presentado a principios del siglo xx. Dewey toma e invierte el razonamiento de quienes defienden un orden de aprendizaje lógico. Precisamente porque el orden lógico de una materia es el del experto, nos dice, y no resulta apto para el principiante. «Hay una fuerte tendencia a suponer que la presentación de una materia en su orden perfeccionado ofrece una vía ideal para el aprendizaje... Desde el punto de vista del estudiante, la forma científica (lógica) es un ideal que ha de ser alcanzado, no un punto de partida desde el cual comenzar..» (citado por KNEI.I.ER 1969: 80).

Para entender esta forma de organización uno debe estar al tanto, por lo menos, de los elementos esenciales de la materia. Es una locura esperar que un alumno aprenda la materia según un orden que solamente tiene sentido para el experto. El aprendizaje, por lo tanto, habría de comenzar por el conocimiento y las experiencias del alumno. Los materiales que serán aprendidos tendrían que organizarse de tal manera que salieran al encuentro de las necesidades del alumno y atendieran a su condición. El modo de aprendizaje es el método de resolver problemas. La diferencia está en el tipo de problemas que han de ser resueltos y en los materiales que deberán aportarse para su solución. El proceso del aprendizaje tendría que partir de algún interés compartido por toda la clase. El maestro habrá de dirigir la conversación en tal forma que conduzca a un problema que interese a los alumnos, desafiando su imaginación. Para Dewey, la lógica no estudia solamente los razonamientos, también estudia el razonamiento en cuanto actividad. Según Dewey, pues, el mero hecho de resolver un problema significa que los materiales organizados para este fin han sido ordenados lógicamente. Para llegar a ello son necesarios conocimientos, educación y madurez. La madurez le hace capaz de pensar lógicamente; la educación le acostumbra a ello; el conocimiento le familiariza con la estructura lógica de

campos enteros del saber.

La presentación de la resolución de problemas es causa en muchas ocasiones de las dificultades y errores que cometen los alumnos. El análisis superficial que se realiza del problema y la dificultad para seleccionar la infor mación se debe, generalmente, «a la insuficiente asimilación de medios y procedimientos para realizar el análisis del texto del problema y el insuficiente trabajo de análisis en las clases» (SARDUY, 1987:75). No se presenta en el aprendizaje una relación crítica hacia el problema. En la formación de este aprendizaje se presentan únicamente problemas perfectamente estructurados en sus partes: (enunciado, pregunta, resolución, solución), la falta de interés proviene de la falta de protagonismo que el alumno percibe; cuando no hay que llegar a la solución que el profesorado desea a través de la resolución que él impone.

❑ D ificu lta des, errores y bloqueos en la resolución de problemas

Las dificultades más representativas se dirigen a la selección de la información. Algunos alumnos destacan los datos e ignoran la pregunta; otros, señalan sólo la pregunta como componente del problema. Esto apunta, en la mayoría de los autores, a que el sujeto realiza un análisis superficial y fragmentario del texto del problema. El alumno expresa determinada pasividad intelectual que se hace palpable en la insuficiente investigación de las relaciones del problema. En el aprendizaje se deberían encontrar con problemas abiertos, incompletos, capaces de conseguir que el niño construya las relaciones necesarias para la resolución.

Respecto a las distintas clases de problemas verbales, THOMPSON y HENDICKSON (1986) observaron que hay problemas más difíciles de resolver que otros. Es necesario presentar los problemas en un orden creciente de dificultad. Rico (1995: 42-43) propone tres fases de presentación:

P.Ver los dos ejemplos donde la cantidad inicial y la magnitud del cambio son conocidas, y el ejemplo donde se conoce la colección total y una de las subcolecciones y se desconoce la otra subcolección.

2°.Ver los dos ejemplos donde la cantidad inicial y el resultado del cambio son conocidos y donde la incógnita en este caso es la magnitud del cambio, y los dos ejemplos donde el referente y el referido son conocidos y se desconoce la comparación.

Y.Ver el ejemplo donde se conocen las dos subcolecciones y se desconoce la colección total, los dos ejemplos donde la comparación y el referido son conocidos y el referente es desconocido, y los dos ejemplos donde la comparación y el referente son conocidos, y donde se desconoce el referido.

Existe una disminución de dificultades cuanto más relación tenga la información que ofrecen los problemas con el entorno en el que se desenvuelven. Esto se puede extender a la repercusión de las creencias que poseemos para la validez o invalidez de los argumentos. EVANS, NEWSTEAD y BYRNE (1993) consideran algunas teorías que intentan explicar el sesgo de las creencias. Aunque para nuestro caso lo que importa es ver lo que estas teorías encuentran (VELASCO, 1996: 121):

-Las conclusiones creíbles son más fácilmente aceptables que las no creíbles.

-Las conclusiones lógicamente válidas son más fácilmente aceptadas que las inválidas.

Existe una interacción entre la validez lógica y la credibilidad, de manera que dicho efecto aparece más marcado en las conclusiones inválidas.

Una actitud inadecuada en la formación del aprendizaje que no tenga en cuenta las variables afectivas descritas con anterioridad, supone el

surgimiento de bloqueos en el resolutor. Se destacan cuatro tipos de bloqueos (Lorenzo BLANCO, 1996: 16):

-Bloqueos de tipo inercial (surcos de la mente). Nuestro proceder suele acomodarse inconscientemente a unas reglas fijas, ello empobrece nuestra capacidad y reduce nuestras posibilidades de éxito.

-Bloqueos de origen afectivo. Hay una amplia gama de sentimientos que favorecen el bloqueo, como la apatía, la pereza ante el comienzo, el miedo al fracaso, la ansiedad, etc.

-Bloqueo de tipo cognoscitivo. Cuando tenemos dificultad para percibir el problema, identificarlo, definirlo o desglosarlo en tareas más sencillas, corremos un alto riesgo de derivar en un estado de bloqueo. Hay, además, otras actitudes que suelen conducirnos a la misma situación: una tendencia hipercrítica hacia nuestro trabajo, la rigidez mental en el empleo de procesos o en la espera de resultados, la incapacidad para dilucidar cuándo disponemos de suficiente información para abordar el problema, etc.

-Bloqueo de tipo cultural y ambiental. El conjunto de ideas y formas de pensar prevalentes en nuestro ambiente influyen del modo más sutil en nuestro modus operandi. Entran a formar parte de nuestra estructura de pensamiento y dirigen, sin nosotros percibirlo, nuestra actuación hacia zonas que no son siempre fructíferas.

13.2 Variables situacionales

Una vez estudiadas las variables intrapersonales - que se relacionan con el sujeto que resuelve el problema, con el problema en sí y con la interacción problema-sujeto-, pasamos a estudiar las variables situacionales, que se relacionan con situaciones que el resolutor no puede controlar.

Metodología didáctica para la enseñanza de la resolución de problemas 13.2.1

SCHOENFELD (1985a: 13-14) nos hace partícipes de las conclusiones que elabora a través de la observación sobre cómo actúan sus alumnos, advirtiendo que el trabajo matemático es, ante todo, un trabajo de descubrimiento31.

Reflexión y propuesta a la vez; lo que ocurre frente a lo que debería ocurrir. Cierto, significa la apertura de vías capaces de acercar lo más posible las formas de pensar a las formas del pensamiento matemático. En este sentido, y al tratarse de la educación primaria, hay que tener en cuenta dos aspectos: a) El aprendizaje representativo y, b) la forma de conseguir un aprendizaje representativo. Respecto al primero cabe destacar los trabajos de SEMADENI (1984) que sugiere la aplicación en el aula del «principio de permanencia en lo concreto». Este principio combina el principio de variabilidad de DIENES32 (1970) con la elección de un ejemplo paradigmático (FREUDENTHAI., 1978). Y los cuatro objetivos sociales para la educación en el área de matemáticas, que ofrece NCTM (1989):

-Trabajadores que sepan leer y escribir matemáticamente ya que las demandas tecnológicas de la sociedad requerirán cada vez más habilidades y comprensión de las mismas, así como la resolución de problemas complejos. En este aspecto, saber leer y escribir matemáticamente denotaría una capacidad para explorar, conjeturar, razonar lógicamente y usar una variedad de métodos matemáticos para resolver distintos problemas.

-Aprendizaje para toda la vida, ya que cada vez es más frecuente cambiar de trabajo y la habilidad para la resolución de problemas ayudará para explorar, crear, acomodar a las nuevas condiciones y crear nuevos conocimientos para la nueva vida.

-Oportunidad para todos ya que las Matemáticas han llegado a ser un filtro para trabajar y para la participación en nuestra sociedad. Por este motivo deben ser accesibles a todos los estudiantes.

-Ciudadanos informados ya que el incremento de la complejidad y de las aportaciones de la técnica hace que la participación de los ciudadanos requiera de estos ciertos conocimientos para poder interpretar determinadas informaciones.

La resolución de problemas es la principal razón para estudiar Matemáticas, en la línea de considerarla como un proceso de aplicación de conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y desconocidas. Resolver problemas supone plantear cuestiones, analizar situaciones, traducir resultados, ilustrar resultados, dibujar diagramas y refutar pruebas y errores. En GAU1.JN (1986) y SCHROEDER y LESTER (1989), podemos encontrar tres enfoques diferentes sobre la resolución de problemas:

-Enseñanzapara la resolución de problemas (teaching for problem solving);

-Enseñanza sobre la resolución de problemas (teaching about problem solving); y

-Enseñanza vía resolución de problemas (teaching vía problem solving).

Respecto a la forma de conseguir un aprendizaje representativo, destacamos la utilización de contraejemplos33:

-Primera, los sujetos no aprecian la necesidad de buscar contraejemplos. Como hemos dicho antes, la posibilidad de falsación - fundamental en el razonamiento científico - no es algo que, de una manera consciente, se haga con frecuencia en el razonamiento cotidiano. Los sujetos muestran una fuerte tendencia a confirmar, más que a falsar. Así, pueden existir individuos que no se planteen que la regla general «todos los cisnes son

blancos» es falseada por la existencia de un sólo cisne negro. Actúan confirmando la regla, es decir, comprobando que los cisnes efectivamente son blancos.

-La segunda posibilidad, es que los sujetos puede que entiendan la necesidad de buscar contraejemplos para asegurar la validez de sus conclusiones, pero no saben hacerlo, es decir, no han desarrollado la capacidad necesaria para conseguirlo. Por parte del profesor/a, con el diálogo, ayudará mediante preguntas, a construir el concepto matemático o la resolución de un problema propuesto.

MARÍN (1984: 77-78)34, nos presenta la pregunta como un arte que expone el impulso necesario para el desarrollo intelectual. La pregunta es un elemento didáctico imprescindible.

Variables socioculturales 13.3

Actualmente, y no por casualidad, los cursos de «Creatividad» y «Problem solving» se consideran sinónimos. La esencia última de la creatividad consiste en resolver problemas. En los cursos de creatividad, según MARÍN (1984: 115), los problemas que han de resolver los alumnos, por principio son elegidos por éstos35, y normalmente también son propuestos por ellos. Son problemas reales a lo sumo ligeramente enmascarados. Los problemas para que estimulen el pensamiento creativo tienen que ofrecer por definición múltiples soluciones. Se trata de situaciones que, como la mayor parte de las que se presentan en la vida corriente, permiten varias respuestas; cuestiones que pudiéramos llamar abiertas, es decir, aquellas que no quedan zanjadas sencillamente calculando o haciendo acopio de información. Las condiciones que se exigen para los problemas de creatividad, son dos: que sean reales y que se presten a soluciones abundantes36

El poder de las influencias culturales ha sido un tema que viene despertando interés desde años atrás como lo muestran los estudios de

TORRANCE (1976), LoGAN y LoGAN (1980), BF.AUDOT (1980), entre otros, que han puesto de manifiesto los diferentes resultados en las distintas culturas.

> «Si las influencias culturales o históricas tienen tanto poder, ello es posible por los maestros, los métodos educativos y los materiales, al igual que los padres» (Toiu NCE. En DE LA TORRE, 1984: 133).

Entre las influencias culturales negativas que afectan al desarrollo resaltan (DE LA TORRE, 1984: 134-135):

-Orientación hacia el éxito, que perjudica a la creatividad cuando se extrema este enfoque en la vida. Las distintas formas de aprendizaje creativo comportan experimentación, riesgo, faltas y errores. Si prescindimos de ello, abandonamos una de las características más reconocidas en la persona creativa: la atracción por lo desconocido.

-Orientación de los superiores, tan grabada en la infancia. Hacer las cosas para que los padres o los superiores den su conformidad.

-Sanciones ante preguntas e indagaciones. El 43% tiene ciertos reparos a preguntar sus dudas y sólo el 17 % no tiene temor.

Se enfoca mal el papel del sexo, resultando las diferencias como algo peligroso en lugar de mirarlas como mutuo enriquecimiento. Se convierten en tabú determinadas áreas de experiencia y se asigna al hombre y a la mujer un papel diferente en la sociedad.

Confunden la divergencia con la anormalidad. Quienes sobresalen en su comportamiento o ideas son observados y relegados del grupo. No se reconoce en ellos potencialidades que debieron desarrollarse.

Capítulo **14**

Métodos, técnicas y estrategias para la resolución de problemas matemáticos

KILPATRICK (1985) enfocó la enseñanza de la resolución de problemas en cinco categorías: ósmosis, memorización, imitación, cooperación y reflexión.

La enseñanza por ósmosis se apoya en la idea de que aprender a resolver problemas es resolver muchos problemas y que, al hacerlo, se aprenden las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ellos.

La memorización implica descomponer un problema en elementos más simples y abordar la solución mediante la enseñanza de elemento a elemento. Este enfoque también está presente en planteamientos no tan tradicionales, que pretenden enseñar «heurística», señalan PUIG y CFRDÁN (1996: 84):

> «En ellos, lo que se llaman "heurísticas" - ya sean herramientas heurísticas u otra cosa, en nuestra terminología - se tratan como procedimientos perfectamente determinados que hay que seguir paso a paso, es decir en cierta manera se algoritmiza la heurística, y se enseñan explícitamente los algoritmos obtenidos».

La imitación consiste en situar al alumnado en presencia de un modelo de resolvente competente y se enseña de alguna manera a analizar esa conducta competente y a compararla con conductas propias o ajenas.

La cooperación consiste en la necesidad de observar cómo sus compañeros resuelven el problema, respetar, ajustar y canalizar las ideas que escuchan.

La reflexión es muy importante en la resolución de problemas. Explica el éxito, el fracaso, las direcciones mal elegidas, la falta de razonamiento en las estrategias... incidiendo en conclusiones válidas para las situaciones futuras.

Estas categorías que enumeran los distintos enfoques de enseñanza para la resolución de problemas, de poco nos servirían si no analizamos los métodos utilizados que facilitan esa resolución de los problemas matemáticos. Se hace necesario ver la resolución de problemas como una actividad mental, y en ésta se hayan las operaciones básicas del pensamiento: El análisis, la síntesis, la generalización, la abstracción y la comparación.

El análisis es la operación mediante la cual el objeto de conocimiento (el problema) se descompone o separa en partes en la mente.

La síntesis37 es el acto de reunir mentalmente los diferentes elementos, conformando un todo: un elemento aislado en el problema se ve en su íntima relación con los otros, en sus nexos e interdependencias.

La generalización se comprende en dos sentidos. Según el primero de ellos, a través de la generalización se diferencian o destacan, en dos o más objetos, propiedades comunes, que no varían de uno a otro. La segunda forma de comprender la generalización es verla como la operación mental que permite distinguir en uno o más objetos, sus propiedades esenciales, bajo la forma de un concepto general.

La abstracción se considera como la operación a partir de la cual se separan determinadas propiedades o índices de ciertos objetos, a la vez que no se tienen en cuenta otras propiedades o índices de esos mismos objetos.

La comparación es la contraposición de diferentes elementos (objetos, problemas, etc.) con el fin de determinar la similitud o diferencia en sus propiedades generales y particulares.

«El carácter de proceso de la solución de problemas, y en particular el de ser un proceso de pensamiento, le viene dado porque en ella el análisis, la síntesis y demás operaciones mentales desempeñan la función principal en el esclarecimiento de aquellas relaciones, propiedades de los objetos, etc., que en la formulación inicial del problema no se dan directamente. Cuando se hace referencia al carácter de proceso, se alude a la forma peculiar en que las operaciones básicas del pensamiento del alumno se manifiestan, a la forma en que ellas se estructuran e interactúan (dinámicamente) entre sí. Las operaciones del pensamiento en su interacción, determinan el mecanismo principal de la solución de cualquier problema» (SsmDuy 1987: 33).

En el ámbito psicológico la actividad de resolución de problemas tiene que ver la formación de un sistema específico de conexiones temporales, como afirma VIGOTSKY (1973: 192-193)38.

Una tentativa de acercar a los escolares los métodos de resolución de problemas son las estrategias heurísticas39

-Los problemas cuya solución no exija otra cosa que la aplicación correcta de cierto procedimiento rutinario;

-los problemas cuya solución pida que se apliquen inteligentemente determinados métodos más o menos corrientes, y

-los problemas para los cuales los métodos corrientes no proporcionen solución alguna.

Ahora bien, para los de la clase 1) sobra toda heurística; con los de la clase 2), toda la necesaria se reduce al precepto de que se intenten aplicar de una manera inteligente los métodos disponibles. Y los de la clase 3) se encuentran más allá de toda heurística. Sin embargo, lo paradójico no es la noción de una heurística matemática, sino, por el contrario, el razonamiento que acabamos

de exponer. Pues la misma clasificación de los problemas da lugar a cierto número de preceptos heurísticos; y voy a enunciar algunos de ellos. Ante un problema dado habrá que preguntarse, ante todo, si pertenece a la clase 1); si así sucede, bastará aplicar el método rutinario correspondiente. En caso contrario, de nada serviría que intentásemos averiguar a cuál de las otras dos clases pertenece; pero, de todos modos, trataremos de aplicar en forma inteligente los métodos usuales; y para la selección de los que se hayan de ir aplicando sucesivamente nos guiaremos por los métodos heurísticos que tengamos a mano. Si antes de haber agotado los métodos disponibles se encuentra la solución buscada, es evidente que el problema pertenecía a la clase 2). Si la aplicación de los métodos comunes no da resultado, podremos concluir que el problema propuesto era de la clase 3). No es necesario decir que para los problemas de este tipo no hay heurística alguna especial; sin embargo, es recomendable que intentemos una vez más la aplicación de los métodos corrientes, no solamente para estar seguros de que no se haya pasado por alto ninguna solución posible, sino también con objeto de profundizar en las causas de su fallo. Sucede con frecuencia que de esta forma se encuentra la solución utilizando una variante de algún método conocido; pero si ello no ocurre, no podrá resolverse más que en virtud de una verdadera invención matemática. Bastaría citar para representar la magnitud del método a Polya y a Shoenfeld, quien indica (1985b) que la instrucción matemática debe incorporar estrategias para que el estudiante aprenda a leer, a conceptualizar, y a escribir argumentos matemáticos. El estudiante debe tener en cuenta que en la aceptación de algún argumento matemático debe inicialmente convencerse a sí mismo, debe convencer a un amigo y, finalmente, debe convencer a un enemigo.

Con relación a la presencia de los métodos heurísticos en la instrucción, SCHOENFELD (1985b: 109) sugiere que es importante que los estudiantes discutan con detalle las estrategias generales y las subestrategias asociadas a cada una de ellas. En todo el proceso de resolución, el estudiante debe reflexionar constantemente acerca de los aspectos vinculados con las distintas

fases de resolución. Algunos elementos guía para la discusión, pueden ser los siguientes:

•Análisis.

•Dibujar un diagrama siempre que sea posible.

•Examinar casos especiales:

-Seleccionar valores particulares para ejemplificar el problema y encontrarle el sentido;

-Examinar casos límites para explorar el rango de posibilidades (sobre el comportamiento de los números enteros, ensayar con algunos para encontrar algún patrón).

•Tratar de simplificar el problema por medio de:

-el uso de simetría, o

-argumentos en los que no haya pérdida de generalidad.

•Exploración.

•Considerar problemas equivalentes:

-Remplazar algunas condiciones por otras equivalentes;

-Recombinar los elementos del problema en diferentes formas;

- Introducir elementos auxiliares, y

•Reformular el problema usando:

-algún cambio de perspectiva o notación;

-consideraciones que involucren el método de contradicción;

-el hecho de que el problema está resuelto y basándose en esto determinar sus propiedades.

•Considerar problemas modificados ligeramente:

-Seleccionar submetas (considerando parcialmente las condiciones);

-Descomponer el dominio del problema y trabajarlo caso por caso.

•Considerar problemas sustancialmente modificados:

-Diseñar un problema semejante con menos variables;

-Fijar todas las variables, excepto alguna de ellas y analizar qué pasa.

•Tratar cualquier problema relacionado que tenga semejanza con:

-la forma,

-los datos, y

-las conclusiones.

•Verificar la solución:

-¿Cumple la solución las siguientes pruebas?

-¿Usa los datos pertinentes?

-¿Concuerda con las predicciones o estimaciones originales?

-¿Resiste pruebas de simetría, dimensión o escalas?

-¿Puede obtenerse de otro modo diferente?

-¿Puede ser reforzada con otros casos especiales?

-¿Puede reducirse a resultados conocidos?

-¿Puede ser generada a partir de algo que tú sabes?

Exposición de métodos para la resolución de problemas matemáticos 14.1

El principio del «Desvío». Se refiere al desplazamiento del problema original a otro dominio conveniente en el cual sea más fácil de resolver. MELZAi (1983) ilustra mediante este método la multiplicación de dos números romanos: XIX y LXXVIII; se realiza la multiplicación de los números 19 y 78, después el resultado (1428) se escribe utilizando la numeración romana, MCDXXVIII.

El método de los dos caminos. Expresar el problema mediante dos vías distintas e igualarlas. Este método se utiliza en la didáctica de la Matemática para llegar a comprender algunos conceptos; así por ejemplo: Una potencia de exponente 0 es igual al número 1. Por un lado utiliza la definición de división de potencias de la misma base con dos potencias de igual exponente, obteniendo una potencia de exponente 0; por otro lado utiliza el algoritmo de la división con el dividendo igual al divisor, siendo el cociente el número 1.

El método de cancelación. Consiste en reordenar los términos o datos de un problema de tal forma que simplifique su solución. «Jugando a las canicas con 7 canicas, sucede lo siguiente: pierdo 3, gano 4, gano 6, pierdo 2, pierdo 3, gano 1, gano 3, pierdo 4. ¿Cuántas canicas tengo después del último suceso enumerado?» Si reordenamos los datos, llegamos rápidamente a la solución:

Tengo-Gano	Pierdo	Obtengo
7		7
4	4	0
6	2 , 3	1
1	1	
3	3	0

Reducción de un problema a casos más simples. Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dados, a la consideración de un conjunto más pequeño contenido en el conjunto dado.

Organización. Realizar croquis, gráficos, figuras, diagramas o esquemas apropiados. El sujeto trata de esquematizar las relaciones entre los datos de formas convencionales, para encontrar así las relaciones necesarias. Solucionar un problema con texto, desde el punto de vista matemático, es la construcción de su modelo matemático, afirma FPIDMAN (1967, en SARDuY, 1987: 44). El modelo reproduce determinadas relaciones esenciales del objeto que se considera como su original, y esto permite realizar en él determinadas transformaciones, como si fueran hechas en el propio original. La solución de un problema matemático con texto es la construcción de un conjunto de modelos o sistemas de modelos.

Expresaremos algunos ejemplos de modelos a través de algunos problemas que se puedan incluir en éstos:

Juan tiene a céntimos de euro. Su madre le da b céntimos de euro. ¿Cuántos céntimos de euro tiene Juan?

a	b
?	

Juan tiene a céntimos de euro. Su madre le da céntimos de euro y ahora Juan tiene c céntimos de euro. ¿Cuántos céntimos de euro le ha dado su madre?

a	?
c	

Una bolsa de gominolas cuesta a céntimos de euro. Me compro cinco de esas bolsas. ¿Cuántos céntimos de euro me gasto?

Me he gastado T céntimos de euro en comprar cinco bolsas iguales de gominolas. ¿Cuál es el precio de cada bolsa?

T céntimos de euro				
?	?	?	?	?
Bolsa	Bolsa	Bolsa	Bolsa	Bolsa

-Manipular y experimentar. Consiste en comprender las relaciones del problema a partir del manejo de materiales manipulativos.

-Modificar el problema. El sujeto modifica el problema excluyendo algunos datos y después, basándose en la explicación lógica del resultado de estos cambios, encuentra la manera de resolver el problema.

-Analogía. El sujeto resuelve un problema análogo pero más sencillo. Para ello se busca en el archivo de nuestra experiencia con problemas, situaciones parecidas y relaciones similares.

-Ensayo y error. Se elige un resultado, operación o relación posible. Se lleva a cabo esa elección cumpliendo las condiciones que indica el problema. Se comprueba si se ha logrado el objetivo; de no ser así, se verifica el error y se vuelve a ensayar con otro resultado, operación o relación.

-Codificación. Consiste en representar los datos o el lenguaje del problema con una expresión que facilite su comprensión. Este método es un derivado del método expuesto anteriormente como Organización.

-Trabajar marcha atrás. Se considera el problema resuelto. Andando el camino desde el estado final al estado inicial para advertir las relaciones necesarias para verificar su solución.

-Contradicción. También llamado reducción al absurdo. Consiste en suponer verdad algo que es falso para llegar a una relación absurda y demostrar la nulidad de la suposición de la que hemos partido.

-Inducción matemática. Se debe a Peano. Se quiere demostrar una propiedad «p» asociada a N.Se comprueba que es válida para 1. Se supone válida para n y se demuestra para n + 1; si se consigue se acepta su veracidad.

-Principio del palomar de Dirichlet. Si m palomas ocupan n nidos y m > n, entonces hay al menos un nido con dos o más palomas.

La invención como método 14.1.1

La Metodología didáctica para el aprendizaje de la Matemática considera valores formativos a la construcción y el descubrimiento.

> «.., el simple hecho de que al resultado de un trabajo original en el campo de la investigación matemática se le llame tanto creación o invención como construcción o descubrimiento, revela toda la multiformidad de la experiencia matemática. (PIAGET y BETH, 1968: 128).

Albert Einstein ha dicho que plantear un problema es casi siempre más decisivo, científicamente, que resolverlo. Hay que saber muy bien dónde está la dificultad, cuál es la deficiencia que intentamos superar o los obstáculos que frenan la realización de un objetivo nuevo.

VIGOSTKY (1973) al relatar experiencias escolares en la Unión Soviética refleja lo positivo que es para los niños inventar situaciones a partir de los dibujos de diversos objetos en una hoja de papel. Muestra la pluralidad de alternativas que presenta un sólo dibujo ante un conjunto de sujetos, y la riqueza de la variedad de situaciones que se obtienen. Del mismo modo expone cómo a partir de una situación y dejando libertad para la expresión de preguntas, los alumnos son más conscientes de las relaciones del problema y son capaces de analizar sus propios errores.

AiZPÚN (1972) juega, desde el principio de variabilidad, con situaciones capaces de alejar el estereotipo y la rutina de la clase de Matemáticas en la resolución de problemas. El alumno inventa y construye, generando ideas consciente de las relaciones implícitas en la situación. La comprensión de estas relaciones se da de forma tan natural y profunda que permite la extensión a nuevas situaciones de mayor dificultad. El hecho de que estas ideas se deban, según Aizpún, a Kerchesteiner (pedagogo alemán de principios de siglo), y la escasa aplicación de ellas en la clase de Matemáticas, demuestra que el reconocimiento de la teoría no implica el asentamiento en la práctica4o

Del mismo modo que la encuesta de «L'Enseignement Mathématique» sobre el método de trabajo de los matemáticos (Publicada por H.Fehr con la colaboración de T.Flournoyy E.Claparéde [París y Ginebra, 1908]), estimuló y provocó la conferencia de Poincaré en 1909 sobre «Invención matemática» y los trabajos posteriores de Hadamard en 1945: «Psicología de la invención», pretendemos con este apartado conseguir que se entienda la invención de situaciones problemáticas, como método capaz de desarrollar la

actividad mental en la resolución de problemas, garantizando la autonomía de las sucesivas construcciones.

Las investigaciones que se han realizado sobre la invención de situaciones problemáticas realizadas por los escolares han permitido estudiar amplias y variadas técnicas que se han ido descubriendo, desde las necesidades expuestas por la originalidad de actuación de los niños. Surgían cada vez más, distintos modelos de invención de problemas con los que se obtenían resultados más fructíferos41. La recopilación de estos modelos en un programa de intervención, se encaminó a una investigación evaluativa que dio lugar a una Tesis Doctoral (FERNÁNDEZ BRAVO, 1999b) en la que se recogieron las siguientes conclusiones:

Relaciones cognitivas, sociales y afectivas determinan y estructuran la dimensión operativa de la formación del individuo en la contextualización de su entorno. La invención-reconstrucción de situaciones problemáticas establece una concordancia significativa con las relaciones psicosociales educativas y relaciones cognitivas, necesarias para enfrentarse con éxito a la resolución de problemas matemáticos; a la oportunidad de adaptar, de renovar, reorganizar, cambiar, seleccionar, de realizar, de crear.

Cuanto más incompleta se presente una situación problemática, capaz de ser reconstruida por el alumno, mayor es la posibilidad que tiene de ser consciente de las relaciones que intervienen en su resolución. Las situaciones que se presentan de forma completa y terminada debilitan el aprendizaje, al ignorarse la dinámica de relaciones intelectuales que han intervenido en el proceso de su construcción.

Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas, para el método de invención, según Fernández Bravo 14.1.2

METAMODELOS (entendemos por «Metamodelos» cada una de las distintas clases de «modelos de situaciones problemáticas», presentadas a la

actividad del alumno, capaces de generar ideas válidas para la invención, reconstrucción y resolución de problemas matemáticos).

FERNÁNDEZ BRAVO (2000a), encuentra seis clases de metamodelos y cuarenta y nueve modelos:

-GENERATIVOS. Deben ser las primeras situaciones a las que se enfrente el alumno, aunque no tienen que ocupar únicamente esos primeros lugares. Desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos en sí mismos. Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y a buscar, a posteriori, la operación válida para dar cuerpo al proceso de reso lución. El número es algo secundario. Permiten retener el desafío central a partir del cual se reflexiona. Se percibe la importancia de la ausencia de arbitrariedad en los problemas. Se desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás.

DeESTRUCTURACIÓN. Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema: enunciado, pregunta, resolución, solución. Se percibe la importancia de cada una, la relación que tienen y la no-arbitrariedad entre ellas. Al implicar al alumno en la construcción del problema, interpreta mentalmente la situación problemática, utilizando las operaciones matemáticas como instrumentos para la resolución de las estrategias elegidas; distingue la solución del problema de la resolución de éste y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación. Se es consciente de que un mismo resultado se puede corresponder con diferentes situaciones planteadas; donde un alumno suma, otro resta. Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da

lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.

ENLACES. Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciadopregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.

De TRANSFORMACIÓN. Utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de análisis y método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

De COMPOSICIÓN. Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección. Consciencia de la necesidad de lectura tantas veces como sea necesaria. Utilización de método de análisis, de síntesis y de análisis-síntesis.

De INTERCONEXIÓN. Extensión de las ideas. Apertura mental en la aplicación de los conceptos y operaciones. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad. Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad. Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado

en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

Modelos Generativos

1. Situaciones sin número. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna.

2. Informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en: lógicas - aquellas que son verdad o mentira para todos - y no lógicas; así como, posibles - muy posibles, poco posibles - e imposibles.

3. Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo.

4. Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: a partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.

5. Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía.

Modelos de Estructuración

6. Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.

7. Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática. Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.

8. Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones: Llegar a la solución dada y aplicar la/s operación/es indicada/s.

9. Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones: Llegar a la solución que se nos ha indicado y utilizar (todos/no todos) los datos numéricos que se nos han dado.

Modelos de Enlaces

10. Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida.

11. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas.

12. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución.

13. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución. Se presenta un enunciado con preguntas en blanco.

14. Inventar un enunciado que se pueda corresponder con una pregunta dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los clatos del enunciado.

15. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

16. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y la operación/es a seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema.

17. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y el proceso de resolución dado.

18. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los clatos del enunciado.

19. Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. Se presentan varias preguntas. La labor del alumno consiste en crear un enunciado, y sólo uno, capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas presentadas.

20. Inventar un enunciado, y sólo uno, con el que se pueda responder, y mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas. Se presentan varias preguntas acompañadas de la indicación de operación/es que se tienen que aplicar para llegar a su respuesta.

21. Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema.

22. Inventar un enunciado, y sólo uno, en el que aparezcan los datos numéricos dados: utilizando todos en el proceso/sin utilizar todos en el proceso, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas.

Modelos de Transformación

23. Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta ala que ya se obtuvo anteriormente.

24. Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema.

25. Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe.

26. Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar las soluciones de ambos.

27. Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto.

28. Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta. Existe un dato, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada.

29. Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente.

30. Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar ambas soluciones.

31. Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado. Se resuelve un problema en cuyo enunciado intervienen dos y

solo dos proposiciones. Una vez resuelto, se niega la primera proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. A continuación, se niega la segunda proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. El último paso consiste en negar las dos proposiciones, se resuelve el problema resultante. Se observan las dificultades de precisar la solución, se comparan las cuatro soluciones.

32. Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.

33. Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe. Los pasos son los mismos que se han seguido en el modelo 31, la diferencia consiste en que el alumno, una vez realizadas las negaciones, cree una pregunta para todos y cada uno de los nuevos problemas, tal que su solución sea la misma.

34. Buscar la correspondencia enunciado pregunta-solución. Se dan varios enunciados, varias preguntas y varias soluciones u operaciones, desordenadas pero que se corresponden entre sí. El trabajo del alumno consiste en buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución.

35. Mezclar las preguntas de dos problemas. Se presentan dos enunciados de dos problemas distintos. Las preguntas que se corresponden con cada uno de estos enunciados se han mezclado generando un sin sentido de palabras. La realización de la actividad consiste en resolver los dos problemas.

36. Cambiar los datos de un problema, o problemas, dentro del mismo, o entre ellos. Se advierte al alumno que todos o algunos de los datos que aparecen se han cambiado y no ocupan el lugar que les corresponde. Su labor consiste en dar respuesta a la pregunta del problema o problemas.

37. Mezclar el/los enunciado/s de un/os problema/s. Se presenta un problema

cuyo enunciado es un sin sentido porque se ha desordenado, o se presentan dos enunciados mezclados. Se da al alumno lo necesario para que pueda ordenarlos sin ambigüedad alguna y resolver ellos problema/s.

38. Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas. Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.

39. Cambiar las preguntas de un problema por una, y sólo una. Se presenta un problema con varias preguntas. La labor del alumno consiste en buscar una sola en cuyo proceso de resolución se contesten las demás.

Modelos de Composición

40. Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática. Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema.

41. Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda.

42. Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste. Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda.

Modelos de Interconexión

43. Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo. Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención.

44. Inventar un problema con un vocabulario específico y la operación/es que debe utilizarse para su resolución.

45. Inventar un problema con un vocabulario específico y la solución dada.

46. Resolver problemas que se presentan deforma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones.

47. Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación. Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio... para recoger la información necesaria. Si nuestros alumnos pertenecen a Educación Primaria, es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor - adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno-, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.

48. Resolver un problema que se presenta deforma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve...

49. Relación entre lógica y matemática.

❑ Diseño teórico de evaluación

Para seguir el proceso de la evolución de los alumnos, cuando utilizamos un método de invención y reconstrucción de situaciones problemáticas, se ha construido una escala de valoración orientativa. Es necesario recoger información sobre el material utilizado, el rendimiento del alumno y su grado de satisfacción ante la realización de estas actividades. Los datos obtenidos desde estos tres enfoques aportan más objetividad por su combinación que por su independencia.

ALUMNO_____ CURSO_____ SEXO_____
0= NUNCA; 1= MUY POCAS VECES; 2= ALGUNAS VECES; 3= EN BASTANTES OCASIONES; 4= SIEMPRE

ESCALA DE OBSERVACIÓN ALGUNOS INDICADORES DE EVALUACIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
EL ALUMNO ANTE LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

RELACIÓN LÓGICA ENTRE LOS ELEMENTOS BÁSICOS DE LA ESTRUCTURA CONFIGURATIVA DEL PROBLEMA Se pretende analizar la capacidad de distinción que tiene el alumno sobre el enunciado, la pregunta, el proceso de resolución y el resultado del problema. Se advierte, también, la necesidad de canalización intelectual de las características de todos y cada uno de estos elementos para poder establecer una dinámica de relaciones lógicas. Se observan habilidades de obtención de información, inferencia, transformación en tanto a la invención o modificación de la situación planteada.
Distingue los elementos básicos de la estructura configurativa del problema: Enunciado, Pregunta, Proceso y Solución
Es capaz de encontrar o establecer una relación lógica entre el enunciado y la pregunta
Es capaz de formular lógicamente un enunciado a partir de una pregunta
Es capaz de formular lógicamente una pregunta a partir de un enunciado
Es capaz de inventar y/o resolver correctamente una situación problemática a partir de unos condicionantes dados.
INTERPRETACIÓN MENTAL DEL PROBLEMA Pretende analizar la comprensión global del contenido matemático, observando habilidades de diferenciación de datos, relación de datos y predicción de estrategias e hipótesis.
Diferencia, en la información, lo conocido de lo desconocido.
Estima posibles relaciones matemáticas entre lo conocido y lo desconocido.
ORGANIZACIÓN INTELECTUAL SIGNIFICATIVA DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN Pretende analizar aspectos cualitativos y cuantitativos de las estrategias realizadas distinguiendo la capacidad para tener ideas, de la validez de las ideas generadas; observando habilidades de elección, argumentación, traducción de la expresión verbal a códigos matemáticos y utilización de instrumentos de cálculo.
Selecciona de la información los datos necesarios para la resolución del problema.
Elabora una estrategia lógica de resolución.
Elabora una estrategia válida de resolución.
Aplica correctamente los conocimientos matemáticos e instrumentos operativos.
Es capaz de argumentar el proceso seguido.

IDENTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN EN LA ESTRUCTURA CONFIGURATIVA DEL PROBLEMA
Se hace necesario distinguir la solución, de la resolución, en un análisis valorativo. Cierto, no significa que se desnaturalice la importancia de llegar a la solución correcta del problema, expresándola adecuadamente. Lo que se pretende analizar con esta categoría clasificatoria es la capacidad que tiene el alumno para comprender la relación lógica que tiene el resultado de un problema con el enunciado, la pregunta y el proceso seguido. Esta comprensión se valora por su necesidad en la argumentación y verificación del resultado, como organización de la estructura de la situación comprendida.
Llega al resultado del problema.
Expresa adecuadamente el resultado.
Razona con argumentos lógicos la relación existente entre el resultado obtenido y los otros elementos configurativos del problema.
Atención: Capacidad de observación del alumno; fijación inequívoca del contenido de la pregunta; representación mental clara de las magnitudes que presentan los datos numéricos; representación clara de la magnitud que se recoge en la pregunta; concentración en la operatividad.
Razonamiento lógico: En la interacción alumno-alumno, alumno-profesor, en el planteamiento de estrategias, en la consecución de ideas para la argumentación, en la interacción pregunta-solución...
Creatividad y originalidad: Fluidez de ideas; flexibilidad del pensamiento; en la exposición de los planteamientos; en la búsqueda de contraejemplos para invalidar las ideas incorrectas de los demás, en el contenido matemático de la expresión lingüística al inventar una situación problemática (...) Concepción de ideas nuevas; en la variedad de relaciones del enunciado a partir de una pregunta, en la variedad de preguntas a partir de un enunciado, en la expresión de la pregunta a partir del enunciado y la operación a seguir...
Expresión escrita y expresión oral: Claridad de expresión respecto a la relación matemática que quiere significar al redactar: un enunciado, una pregunta, una situación; redacción lógica de la situación que quiera representar (...) Claridad en la comunicación de ideas; utilización de vocabulario correcto; escuchar de forma reflexiva y atenta, dejar terminar la exposición de los demás sin interrumpir...
Conceptos matemáticos: Comprensión de los conceptos matemáticos implícitos en la resolución del problema.
Numeración: mayor-menor, cifra-número, valor posicional, orden y seriación...
Operaciones: algoritmos, comprensión de las relaciones entre los términos representativos, relación entre las operaciones, propiedades...
Medida: distinción de magnitudes, elección correcta de elementos de las distintas magnitudes, equivalencias...

TRANSFERENCIA DE LOS CONOCIMIENTOS ADQUIRIDOS
De nada serviría resolver problemas si no se adhieren al conocimiento conclusiones, capaces de evitar la reiteración de los errores cometidos, o capaces de extender la validez de las ideas expuestas. En este sentido, podemos hablar, a la vez, de deducciones por auto-observación, valorando procesos metacognitivos. Si entendemos la matemática como una dinámica de relaciones lógicas, y entendemos la resolución de problemas —desde el concepto de desafío o reto intelectual— como canalización del pensamiento matemático, debemos entender que la metacognición[42]. Tesis como la de De Franco (en Carrillo y Guevara, 1996: 65-81) o trabajos como el de Monereo (1994: 74-80) consideran los factores metacognitivos como elementos esenciales para un aprendizaje significativo. Lo que importa, entonces, es la actividad matemática en sí, y no la lista de teoremas publicados que nada dice si no forma parte de las conclusiones elaboradas mediante la reflexión en el acto que desarrolla el conocimiento.
Establece conclusiones válidas.
Comprende las conclusiones establecidas por los compañeros.
Transfiere los conocimientos implícitos en las conclusiones obtenidas a la posterior resolución de problemas y otros contenidos matemáticos.
Transfiere los conocimientos implícitos en las conclusiones obtenidas a otras áreas del currículo.
VALORACIÓN SOCIAL
Actitud positiva hacia la resolución de problemas matemáticos.
Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
Confianza en sus propios medios para buscar soluciones (autonomía).
Respeto de las reglas para llevar a cabo un diálogo.
Capacidad crítica y responsable ante las ideas de los demás.
ANÁLISIS DEL MATERIAL UTILIZADO: LAS SITUACIONES PROBLEMÁTICAS PROPUESTAS
ADAPTACIÓN DEL MATERIAL
Se adapta a la edad del alumno.
Se adapta a los contenidos previos teóricos del currículo.
Se adapta a las experiencias habituales de los alumnos.
No favorece, por su lenguaje, construcción o tipo de actividades, más a sujetos de un sexo, cultura, raza...
Se adapta al entorno del alumno.

CONSTRUCCIÓN DEL MATERIAL

El lenguaje utilizado es claro y correcto.

El lenguaje utilizado se adapta al vocabulario del alumno sin desnaturalizar el significado de los conceptos.

La composición de la página es adecuada para realizar lo que se pide.

La distribución de las actividades hace ameno el material.

La regularidad cíclica de las actividades favorece la solidez de los conocimientos adquiridos.

La regularidad cíclica de las actividades permite la adquisición de conocimientos no alcanzados.

CONTENIDO DEL MATERIAL

— Las actividades propuestas...

... satisfacen al alumno.

... despiertan la curiosidad.

... desafían.

... son abiertas y favorecen la extensión a otras actividades que no se presentan en el material.

... favorecen la comprensión de situaciones cotidianas.

... favorecen la comprensión de cálculo y conceptos matemáticos.

... favorecen la autocorrección.

... favorecen la discusión y el diálogo.

... potencian la actividad mental del alumno.

... son suficientes para el tiempo programado.

LA VALORACIÓN DEL ALUMNO SOBRE SU GRADO DE SATISFACCIÓN

El grado de satisfacción recogido por el alumno hacia una actividad determinada, incide considerablemente para el desarrollo o estancamiento del aprendizaje de los conocimientos implícitos en la extensión de conceptos, enlazados con la realización de la actividad. Pero hay que decir, también, que la satisfacción no tiene un grado constante. La observación implica conocer cuándo el alumno posee un grado positivo o negativo de satisfacción, para mantener el primero o aumentar el segundo. Conseguir esto supone registrar dos fenómenos operantes de la satisfacción: Lo que es capaz de producirla y lo que se es capaz de conseguir con ella. Así, la resolución de un tipo determinado de situaciones problemáticas puede producir, o no, satisfacción ante la realización de la actividad. Con el ánimo de hacer partícipes a los alumnos en la evaluación, se les pide su opinión. Así, se observa la incidencia que, desde su punto de vista tiene el Programa en su aplicación, sobre el grado de satisfacción que presentan ante la resolución de problemas matemáticos. La cuestión se les plantea de forma simple, sencilla y concreta. Las respuestas de los alumnos dependen de una serie de circunstancias, más o menos atractivas, que inciden sobre ellas. Sin necesidad de poner en duda su sinceridad es importante distinguir la concienciación de la respuesta respecto a ellos en sí mismos o respecto a lo que

saben que debería ser contestado. En muchas ocasiones, confunden lo que es con lo que debería ser; el «deber ser» se les manifiesta de una manera inconsciente en infinitud de situaciones. Así, un niño al que no le gusta la resolución de problemas podría contestar que le gusta, debido a que eso es lo que él considera que debería ser. Sin gustarle la resolución de problemas señala lo contrario por su falta de confianza y seguridad; señalar lo real supondría admitir una desventaja aparente respecto a lo correcto; desventaja que intenta disimular. Es muy habitual que con las respuestas irreales, vengan de las causas citadas o de otras omitidas, tiendan los alumnos a quedar mejor que con las respuestas reales; ya de una manera consciente, ya de manera inconsciente. Con todo esto, las respuestas serían poco fiables si no se permitiese el anonimato. Por tanto, el objetivo de esta decisión que se les plantea es triple: hacer partícipes a los alumnos, estudiar las respuestas y contrastar los resultados que se van obteniendo con otras observaciones realizadas por el profesor.
Me gusta resolver problemas de Matemáticas.

14.2 Estrategias utilizadas por los escolares

14.2.1 Estrategias de adición y sustracción

Las estrategias que se exponen pueden verse en CARPENTER, HIEBERT y MOSER (1981), HIEBERT, CARPENTER y MOSER (1982) y CARPENTER y MOSER (1984).

Fundamentalmente, los niños resuelven los problemas de tres modos diferentes: mediante la elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos, mediante el uso de secuencias de recuento, o recurriendo al recuerdo de hechos numéricos básicos, y encuentran el resultado de estos problemas recurriendo a estrategias que se pueden denominar como sigue:

-Contar todos.

-Contar hacia arriba desde el primero.

-Contar hacia arriba desde el mayor.

-Quitar de.

-Contar hacia abajo desde.

-Quitar hasta.

-Contar hacia abajo hasta.

-Añadir hasta.

-Contar hacia arriba desde.

-Emparejar.

Las tres primeras suelen utilizarse en los problemas aditivos y las restantes en los problemas de substracción.

BAROODY (1988) en el estudio de la sustracción informal determina dos tipos de procedimientos:

1)Procedimientos concretos. En un principio los niños emplean modelos concretos que representan directamente su concepto informal de la sus tracción como «quitar algo». Este procedimiento extractor comporta: a) representar el minuendo, b) quitar un número de elementos igual al sustraendo y c) contar los elementos restantes para determinar la respuesta.

2)Procedimientos mentales:

2.1.Retrocontar: una ampliación natural del conocimiento existente. Cuando los niños están preparados abandonan los procedimientos concretos y adoptan los mentales. Un procedimiento mental muy usado es contar regresivamente o retrocontar. Parte también de una concepción extractiva de la sustracción, como ocurría al utilizar

objetos concretos. Retrocontar implica expresar el minuendo, contar hacia atrás tantas unidades como indica el sustraendo y dar el último número contado como respuesta. Este procedimiento es más complicado en el plano cognoscitivo que el anterior, puesto que retrocontar comporta un método de llevar la cuenta que debe ejecutarse mientras el niño va contando hacia atrás. Retrocontar exige contar regresivamente que es más difícil para los niños que contar progresivamente. La dificultad de retrocontar está relacionada con el tamaño de los números. Por ejemplo, en el caso 8 - 2, el proceso consta de dos pasos. Pero, en el caso 8 - 7, el proceso se complica ya que consta de siete pasos.

2.2. Desarrollo de procedimientos flexibles. A medida que en las tareas de sustracción de los niños intervienen números mayores, ellos descubren por su cuenta otros métodos de sustracción. Al principio muchos niños utilizan procesos de retrocuenta y más adelante inventan un procedimiento de cuenta progresiva. Es similar al enfoque del sumando ausente.

Estrategias de multiplicación y división 14.2.2

Las experiencias realizadas por TEULE-SENSACQ y VINRICH (1982), que observaron a alumnos de siete a nueve años resolviendo varios problemas, revelan estrategias de tres tipos: aditivas, sustractivas y multiplicativas. Las aditivas son las siguientes:

-Contar uno a uno.

-Sumar reiteradamente el divisor.

-Sumar reiteradamente el divisor a partir de un múltiplo de éste.

Las sustractivas se corresponden con las aditivas:

-Restar reiteradamente el divisor.

-Restar reiteradamente el divisor a partir del resultado de restar un múltiplo de éste.

Finalmente, las multiplicativas son versiones más o menos sofisticadas de la estrategia de «búsqueda del factor que falta» adaptadas al caso de la división con resto en que hay que buscar el factor que más aproxime por defecto al resultado.

Según BAROODY (1988) en un principio los niños se basan en procedimientos informales de contar para calcular productos. La mayoría de los niños que empiezan a aprender a multiplicar poseen las técnicas de contar y de llevar la cuenta necesarias para calcular productos mentalmente. Para lograr que el cálculo mental sea más manejable, los niños pueden crear una colección para representar el multiplicando, o bien emplear una pauta digital para representarlo. Para 4 x 2, representa mediante los dedos el 4 y, a continuación, cuenta esta pauta dos veces42. Con la utilización de pautas digitales, el niño elimina la necesidad de llevar la cuenta. También suelen darse cuenta enseguida de que contar a intervalos puede servir para la multiplicación. En ocasiones, los niños recurren a su conocimiento formal para abordar la multiplicación. Con frecuencia usan su conocimiento de las sumas dobles para determinar productos en los que el multiplicador es dos o para razonar la respuesta de problemas mayores.

WFAVER (1955) destaca, después de describir el método utilizado por una maestra para descubrir las destrezas, diferentes estrategias como: 1) conceptualizar en forma concreta, mediante hileras de puntos, 2) enfocar abstractamente el problema por medio del principio distributivo, 3) valerse de la comprensión de la naturaleza conmutativa de la multiplicación y 4) conjugar el conocimiento de las relaciones entre números con la comprensión del sistema denario de numeración (por ejemplo, para multiplicar 9 x 5, puede el niño trabajar de la siguiente forma: 4 veces nueve son 36; y 10

hacen 46; así que le quitamos 1, y salen 45).

Bibliografía

ABRANTES, P. (1996): «El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular». Revista UNO (8), 7-18. Barcelona: Graó.

AIZPÚN, A. (1972): Teoría y Didáctica de la matemática actual. Vol. 1 y II. Barcelona: Vicens Vives.

ALONSO TAPIA, J. (1991): Motivación y aprendizaje en el aula. Madrid: Santillana.

ALONSO, C. y GALLEGO DOMINGO, J. (1994): Estilos de Aprender. Estilos de Enseñar. Madrid: UNED.

AMMERMAN, R. (1965): Classics of analytic Philosophy. New York: McGraw Hill.

ARFOUILLOUX, J. C. (1977): La entrevista con el niño. Madrid: Marova.

ARNAU, J. (1981): Diseños experimentales en psicología y educación. México: Trillas, Vol. 1 y 2.

ARRIETA, J. J. (1989): «La resolución de problemas y la educación matemática. Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular». Enseñanza de las Ciencias 7(1), 63-71.

BANCROFT, T. A. (1968): Topics in intermediate Statistical methods, Vol. 1 Iwoa State Univ Press, Ames, Iowa.

BARBERÁ ALBALAT, V. (1992): Cómo sobrevivir a la Reforma. Madrid: Escuela Española.

BARBERÁ, E. (1995): «Estrategias en matemáticas». Cuadernos de Pedagogía, 237,29-32.

BAROODY A. (1988): El pensamiento matemático en los niños. Madrid: Visor.

BAROODY A. J. (1984): «Children's difficulties in substraction: some causes and questions». fournal for Reserch in Mathematics Education (15), 203-213.

BARTLETT, F. C. (1958): Thinking: An Experimental and social study. Londres. Allen and Unwin.

BATATO, K. (1974): «Técnicas y actividades para el desarrollo de la creatividad». Revista Vida Escolar (158).

BEAUDOT, A. (1973): La creatividad en la escuela. Madrid: Studium.

BEAUDOT, A. (1980): Creatividad. Madrid: Narcea.

BELL, A. y ONSLOW B. (1988): Multiplicative structures: Development of the unders of rates. Shell Centre for Mathematics Education.

BEREITER, C. (1985): «Toward a Solution of de Learning Paradox». Review of Educational Research, 55.

BERMEJO, V. (1990): El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas. Barcelona: Paidós.

BLALOCK, H. M. (1966): Estadística social. México: FCE.

BLANCO NIETO, L. J. (1991): «La resolución de problemas y los profesores de Matemáticas». Revista Suma. N.° 9.

BLANCO NIETO, L. (1993): Consideraciones elementales sobre la solución de problemas. Badajoz: Universitas Editorial.

BLANCO NIETO, L. (1994): Los problemas de sumar y restar. Badajoz: Universidad de Extremadura.

BLANCO PRIETO, F. (1990): Evaluación educativa: Marco, Concepto y Modelo. Salamanca.

BOYER, C. (1987): Historia de la Matemática. Madrid: Alianza.

BRACHT, G. H. y GLASS, G. V. (1968): «The external validity of experiments». American Educational ResearchJournal, n.° 5, 437-474.

BRISSIAUD, R (1993): El aprendizaje del cálculo. Madrid: Visor.

BROMME, R yJUL, K. (1984): Students «understanding» of tasks in the view of Mathematics teachers. Institut fair didaktik der mathrmatik der Universitat Biekfeld.

BROUSSEAU, G. (1988): Fundamentos de Didáctica de la Matemática. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

BROWN, M. (1981): «Number operations». En K.Hart: Children's understanding of mathematics: 11-16. A report of concepts in secondary mathematics and science. Londres. John Murray

BRUNER, J. (1978): El proceso mental en el aprendizaje. Madrid: Narcea.

CABALLO, V. (1988): Teoría, evaluación y entrenamiento de las habilidades sociales. Valencia: Promolibro.

CALLEJO de la VEGA, M. L. (1990): La resolución de problemas en un club matemático. Madrid: Narcea.

CALLEJO, M. L. (1994): Un club matemático para la diversidad. Madrid: Narcea.

CALLEJO, M. L. (1995): «Evaluación de los alumnos en resolución de problemas». En Aspectos didácticos de Matemáticas, F.HERNAN y otros. Col. Educación Abierta 115. ICE de la Universidad de Zaragoza.

CALLEJO, M. L. (1996): «Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas». Revista UNO, (8), 53-63.

CARPENTER, T.P; HERBERT, J. y MOSER, M. (1981): «Problem structure and First - grade children initial solution processes for simple addition and subtraction problems». Journal for research in mathematics education (12), 27-39.

CARPENTER, T. P. y MOSER, M. (1982): «The development of addition and subtraction problem-solving skills». En T Carpenter, M.Moser y T.Romberg (comps.), Addition and subtraction: A cognitive perspective, Hillsdale, N.J.: L.Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P. y MOSER, M. (1983): «The acquisition of addtion and subtraction concepts». Lesh y Landau, Acquisition of Mathematics concepts and Proceses. Orlando: Academic Press.

CARRILLO, J. (1995): «La resolución de problemas en Matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación?>' Investigación en la Escuela, 25, 79-86.

CARRILLO, J. y GUEVARA, F. (1996): «Un instrumento para evaluar la resolución de problemas». Revista UNO. N 8, 65-81.

CASTELNOUVO, E. (1963): Geometría intuitiva. Barcelona: Labor.

COCKCROFT, W. H.(1985): Las Matemáticas sí cuentan. Madrid: MEC.

COLL, C. (1979): Psicología genética y educación. Barcelona: Oikos-Tau, S.A.

CUEVAS, J. (1989): «Els métodes de lectura i la Mengua materna en els rendiments escoiars globais deis nens del Cicle Inicial i Mitjá d'EGB, I» (Tesis doctoral) Barcelona: Departamento de Pedagogía y Didáctica, UAB.

DAVIDOV V. (1988): La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Moscú: Progreso.

DAVIS Y HERSH (1987): Experiencia matemática. Barcelona: MEC-Labor.

DAVIS, G. (1975): Estrategias para la creatividad. Barcelona: Paidós.

DE BONO, E. (1968): New Think. The use of lateral thinking in the generation of new ideas. Nueva York. Basic Books.

DE GUZMÁN, M. (1984): Cuentos con cuentas. Barcelona: Labor.

DE GUZMAN, M. (1985): Enfoque heurístico de la enseñanza matemática. Aspectos didácticos de matemáticas. ICE Universidad de Zaragoza, 31-46.

DE GUZMÁN, M. (1987): Aventuras matemáticas. Barcelona: Labor.

DE GUZMÁN, M. (1991a): «Tendencias y experiencias innovadoras en educación matemática». Ponencia presentada en Ibercima. Montevideo, julio de 1991.

DE GUZMÁN, M. (1991b): Para pensar mejor. Barcelona: Labor.

DE LA TORRE, S. (1984): Creatividad Plural. Barcelona: PPU.

DE LANDSHEERE, G. y BAYER, E. (1977): Cómo enseñan los profesores. Análisis de las interacciones verbales en el aula. Madrid: Santillana.

DE PERETTI, A. (1986): «Organización de la enseñanza y estructuraciones diferenciadas de las agrupaciones de alumnos». Cahiers Pédagogiques, núms. 244-245, pp. 6-15.

DE PERETTI, A. (1989): Groupements. Cahiers Pédagogiques, ñ 279, XII.

DELAMONT, S. (1984): La interacción didáctica. Madrid: Cincel-Kapelusz.

DESCARTES, R. (1986): Reglas para la dirección del espíritu y el discurso del método. Madrid: Mediterráneo.

DEWEY J. (1933): Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre

pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós.

DEWEY J. (1998): Democracia y Educación. Madrid: Morata (Ed. Original, 1916).

DEZA, M.J.; CARRASCO, J. y BASTERRERCHE, J. (1995): Técnicas de trabajo grupal. La escuela en acción, ñ 10542, II, pp. 31-54.

DÍAZ, F. (1990): «Hacia un nuevo concepto de evaluación». Escuela Española, ñ 3022.

DICKSON, L; BROWN, M. y GIBSON, O. (1991): El aprendizaje de las Matemáticas. MEC/Labor.

DIENES, Z.P. (1970): Enseñanza de la Matemática. Barcelona: Teide.

DIENES, Z.P. (1977): Las seis etapas del aprendizaje de la Matemática. Barcelona: Teide.

DOMENECH MASSONS, J. M. (1975): Métodos estadísticos para la investigación en Ciencias Humanas. Barcelona: Herder.

DOMENECH, J. M. y RIBA, M. D. (1985): Métodos estadísticos. Modelo lineal de regresión. Barcelona: Herder.

DRAY,, J. (1957): Iaws and Explanation in History. Londres, Oxford University Press.

DREMAN, S. B. (1976): «Sharing behavior in Israelí school children: Cognitive and Social learning factors». Child Development, 47, 186-194.

DUNCKER, K. (1945): «On problem solving». Psychological Monographs (270).

ECO, U. (1993): ¿Cómo se hace una tesis? Barcelona: Gedisa.

ELLIOTT, J.(1994): La investigación-acción en Educación. Madrid: Morata

(2 ed.).

ESCÁMEZ, J., ORTEGA, P. y SAURA, P. (1987): «Educar en la solidaridad. Programa pedagógico». Revista española de pedagogía, 178, 499-527.

EVANS, J.; NEWSTEAD, S. E. y BYRNE, R. J. (1993): Human reasoning. Thepsychology óf deduction. Hove and Hillsdale. LEA.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1989): Los Números en Color de G.Cuisenaire. Madrid: Seco-Olea.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1994): La naturaleza del material en la didáctica de la matemática. Comunidad Educativa Madrid: ICCE (220) 25-28.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A.(1995a): Las cuatro etapas del acto didáctico. Madrid: ICCE, (228).

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995b): «Educación, globalización y... Matemática». Comunidad Educativa Madrid: ICCE. (223), 34-37.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995c): «Fundamentos epistemológicos del aprendizajeenseñanza por investigación. Iniciación a la división». Comunidad Educativa Madrid: ICCE., (226) 36-41.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995d): «Investigación de los efectos de la metodología constructivista en el aprendizaje de la probabilidad en ESO». MEC (9) Cep LatinaCarabanchel, 26-36.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995e): La Matemática en Educación Infantil. Madrid: Ediciones Pedagógicas.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1996): «Relaciones psicosociales educativas en la resolución de problemas». Comunidad Educativa Madrid: ICCE (234).

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1997): «Evaluación cualitativa de resolución (le problemas». Comunidad Educativa. Madrid: ICCE (242) 37-40.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1998): «Investigación sobre los mecanismos de orientación lateral. El aprendizaje de los conceptos: derecha e izquierda». SUMA, Febrero (27) 57-63.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1999a): «Educación Matemática: Utilización de paréntesis y corchetes». Revista Pedagógica Acción Educativa. (102-103) 84-89.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1999b): «Efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en el rendimiento de los alumnos, del segundo ciclo de Educación Primaria, para la resolución de problemas matemáticos». Tesis Doctoral. UNED. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000a): Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. Barcelona: CISS/PRAXIS.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000b): «La resolución de problemas matemáticos en la E. Primaria» Actas I Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad (le Madrid: Marzo. Comunidad de Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000c): «El euro como moneda. ¿Por qué nos preocupa tanto un nuevo envase?» Revista Cpr Retiro. Mayo. Comunidad de Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2002): La numeración y las cuatro operaciones matemáticas. Didáctica para la investigación y el descubrimiento a través de la manipulación. Madrid: Editorial CCS.

FINGERMANN, G. (1972): Lógica y teoría del conocimiento. Buenos Aires: El Ateneo. (25 ed.).

FLANDERS, N. L. (1977): La interacción didáctica. Madrid: Anaya.

FOX, D. J. (1981): El proceso de investigación en educación. Navarra: EUNSA.

FREDERICKSEN, N. (1984): «Implications of cognitive theory for instruction in problem solving». Review of Educational Research, (54), 363-407.

FREGE, G. (1974): Escritos lógico-semánticos. Madrid: Tecnos.

FREUD, S (1981): Más allá del principio del placer Madrid: Biblioteca Nueva (Ed., 1920).

FREUDENTHAL, H. (1973): Mathematics as an educational task. Dordrecht. Reidel.

FREUDENTHAL, H. (1978): Weeding and Sowing. Dortrecht. Reidel.

GARCÍA LLAMAS, J.L.; PÉREZ JUSTE, R. y DEL RÍO, D. (1992): Problemas y Diseños de investigación resueltos. Madrid: Dykinson.

GAULIN, C (1982): «La resolution de problémes: le mot d'ordre pour les années 19801990, Quoi en penser?» En, La didactique mathématique au primaire. Actes du Colloque mathématique. Universidad de Quebec, Chicontini.

GAULIN, C. (1986): «Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas 1». Números, (14), 11-18.

GREENO, J. G. (1978): «A study of problem solving». En R.Glaser (Comps.): Advances in instructional Psychology, Vol. 1, Hillsdale, N.J.Erlbaum.

GUÉTMANOVA, (1989): Lógica. Moscú: Progreso. Trad. Víctor Médnikov.

GUÉTIMANOVA, A. y otros (1991): Lógica: En forma simple sobre lo complejo. Moscú: Progreso.

GUILFORD, J. P. y otros (1983): Creatividad y Educación. Barcelona: Paidós.

HADAMARD, J. (1947): Psicología de la invención en el campo matemático. Buenos Aires: Espasa Calpe.

HALMOS, P. R. (1980): «The heart of mathematics». American mathematical Monthly, (87), 519-524.

HATFIELD, L. L. y BRADBARD, D. A. (Eds.) (1978): Mathematical problem solving: papersfrom a research worhshop. Ohio. ERIC Clearinghouse for Science.

HEIDEGGER, M. (1951): El ser y el tiempo. México: FCE.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. y MOSER, M. (1982): «Cognitive development and children's solutions to verbal arithmetic problems». fournal for research in mathematics education (13), 83-98.

HITCH, G. y A.D.BADDELEY (1976): «Working memory». En G.A.Bower (Ed.): The psychology of learning and motivation. Vol. 8. New York: Academic Press.

HOSFORD, P.L. (1984): What we know about teaching. Alexandria. Association for Supervision and Curriculum Development.

HUNT, J. M. (1961): Intelligence and experience. New York: Ronald Press.

HUNT, J. M. (1969): The challenge of incompetence and proverty-Papers on the role of early education. Urbana. University of Illinois Press.

ICMI (Kuwait, 1986): Las Matemáticas en primaria y Secundaria en la década de los noventa. Traducido al español en Mestral.

JOHNSON-LAIRD, P. N. y STEEDMAN, M. J. (1978): «The psychology of sillogisms». Cognitive Psychology (10), 64-99.

KAMII, C. (1993): El niño reinventa la aritmética (I y II). Madrid: Visor.

KAMII, C. (1995): El número en la educación preescolar. Madrid: Visor.

KANT, I. (1961): Crítica de la Razón Pura. México: Porrúa (8 ed.).

KANTOWSKI, Mary G. (1977): «Processes Involved in Mathematical Problem Solving». journal for Research in Mathematics Education.

KANTOWSKI, M. G. (1979): The use of heuristics in problem solving. Universidad de Florida.

KERLINGER, F. N.(1981): Investigación del comportamiento. México: Interamericana.

KILPATRICK, J. (1985): «A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving». En E.A.Silver: Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives, 1-15. Hillsdale, N.j., Lawrence Erlbaum Associates.

KILPATRICK, W. (1942): «Philosophy of Education from the experimentalist outlook», en el libro editado por Henry, N. B.: The Forty-First Yearbook of the National Societyfor the study of education. Parte 1, Chicago: University of Chicago Press.

KINTSCH W. y GREENO, J. G. (1985): «Understanding and solving word arthmetic problems». Psychological Review (92) 109-129.

KLEINER, I. (1986): «Famous problems in mathematics: An outline of a course». For the learning of mathematics, 6(1), 31-38.

KNELLER, G. (1969): La lógica y el lenguaje en la educación. Buenos Aires: El Ateneo.

KOTHE, S. (1986): Cómo utilizar los Bloques Lógicos de Dienes. Barcelona: Teide.

KRINITSKI, N. (1988): Algoritmos a nuestro alrededor. Moscú: Mir.

KRULIK, S. y WEISE, I. B. (1975): Teaching secondary school mathematics. Filadelfia. W.B.Saunders Company

KRUTETSKII, V. A. (1976): The Psychology of Mathematical Abilities in School children. Chicago: University of Chicago Press.

KRYGOWSKA, A. (1979): Educación matemática en el primer ciclo de la enseñanza post-elemental y secundaria. Nuevas tendencias en la enseñanza de las matemáticas. ICMI. Unesco, 29-49.

LAFOURCADE, P. D. (1987): Evaluación de los aprendizajes. Madrid: Cincel.

LAHORA, C. (1996): Actividades matemáticas con niños de 0 a b años. Madrid: Narcea.

LAKATOS, 1. (1981): Matemáticas, Ciencia y Epistemología. Madrid: Alianza.

LE LIONNAIS, F. (1962): Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: Editorial Universitaria.

LEIF, J. y DEZALY, R. (1961): Didáctica del cálculo, de las lecciones de las cosas y de las ciencias aplicadas. Buenos Aires: Kapelusz.

LESH, R.; LANDAU, M. y HAMILTON, E. (1983): «Acquisition of Mathematics Concepts and Proceses». New York: Academic Press (259-344).

LESTER, F. (1983): «Trends and issues in mathematical problem solving research». En R.Lesh y M.Landau (Eds.), Accquisition of Mathematics Concepts and Proceses. Academic Press.

LIPMAN, M. (1987): «La utilidad de la filosofía en la educación de la

juventud». Revista de Filosofía y de Didáctica de la Filosofía, III, 3.

LODUCHOWSKI, H. (1982): Participación y comunicación creativas. Barcelona: Herder.

LOGAN y LOGAN (1980): Estrategias para una enseñanza creativa. Barcelona: Oikos-Tau.

LORENZO BLANCO, J. (1996): «La resolución de problemas. Una revisión teórica». Revista Suma, (21), 11-20.

LOVELL, K. (1986): Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños. Madrid: Morata.

MARÍN, R. (1974): La creatividad en la educación. Buenos Aires: Kapelusz.

MARÍN, R. (1984): La creatividad. Barcelona: CEAC.

MARTÍ, E. (1996): «Comprensión matemática: Forma y significado». Revista AULA, (48), 70-75.

MARTÍN-MORENO CERRILLO, Q. (1987): Cuestiones sobre la organización del entorno del aprendizaje. Madrid: UNED.

MASON, J.; BURTON, L. y STACEY, K. (1988): Pensar matemáticamente. Barcelona: Mec-Labor.

MAYER, R (1986): Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona: Paidós.

MAZA, C. (1989): Conceptos y numeración en educación infantil. Madrid: Síntesis.

MAZA, C. (1991): Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Madrid: Visor.

MCGUIGAN, F. J. (1990): Psicología Experimental. México: Trillas (4d

ed.).

MCLEOD, D. B. (1985): «Affective issues in research on teaching mathematical problem solving». En E.Silver: Teaching and learning matehematical problem solving. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

MEC (Ministerio de Educación y Ciencia) (1990): LOGSE. Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo. Madrid: MEC.

MEC (1992): Materiales para la reforma (Infantil «relaciones, medida y representación en el espacio» y Primaria «Área de matemáticas»): Serie cajas rojas. Madrid.

MEDINA, A. (1988): La enseñanza y la interacción social en el aula. Madrid: Cincel.

MIALARET, G. (1977): Las Matemáticas, cómo se aprenden cómo se enseñan. Madrid: Pablo del Río.

MONEREO, C. (1995): Enseñar a conciencia. ¿Hacia una conciencia metacognitiva? Revista Aula. N° 34, 74-80.

MONSERRAT, J. (1984): Epistemología Evolutiva y Teoría de la Ciencia. Madrid: UPCM.

NCTM (1980): Agenda for action. Recomendations for school mathematics of the 1980s. Virginia.

NCTM (1981): Priorities in school mathematics. Virginia.

NCTM (1989): New directionsfor elementary school matehmatics. Yearbook. Virginia.

NCTM (1990): Sugerencias para resolver problemas. México: Trillas.

NCTM (1991): Estándares curriculares y para la evaluación. Sevilla. SAEM

Thales.

NESHER, P. (1980): «The stereotyped nature of school word problems». For de Learning of Mathematics. Vol. 1.

NESHER, P. (1986): «Learning Mathematics. A Cognitive Perspective». American Psychologist 41(10), 114-122.

NESHER, P. y KATRIEL, T. (1977): «A semantic analysis of addition and subtration word problems in arithmetic». Educational Studies in Mathematics (8), 251-269.

NEWELL, A. y SIMON, H. A. (1972): «Human problem solving». Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

NICKERSON, R.S.; PERKINS, D. y SMITH, E. (1985): Enseñar a pensar Barcelona: Paidós.

NICHOLLS, J. G. (1983): «Conceptions of ability and achievement motivation: A theory and its implications for education». En S.G.Paris, G.M.Oslon, H.W.Stevenson: Learning and motivation in the classroom. Lawrence Erlbaum. New jersey Hillsdale.

NOONE, D. J.(1996): Solucione sus problemas creativamente. Barcelona: Plaza & Janés.

NRC (National Research Council) (1989): «Everybody counts: A report on the future of mathematics education. Washington». National Academic Press.

ORTON, A. (1990): Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Morata-Mec.

PERELMAN, Y. (1968): Matemáticas recreativas. Barcelona: Martínez Roca.

PEREZ JUSTE, R. y GARCÍA RAMOS, J. M. (1989): Diagnóstico,

evaluación y toma de decisiones. Madrid: Rialp.

PIAGET, J y BETH, E. W. (1968): Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real. Madrid: Ciencia Nueva.

PIAGET, J.; CHOQUET, G. y otros (1978): La enseñanza de las Matemáticas modernas. Madrid: Alianza Editorial.

PIAGET, J. (1979): Epistemología de la Matemática. Buenos Aires: Paidós.

PICHERT, J. y ANDERSON, R. C. (1977): Taking differentperspectives on a story journal of Education Psychology (69), 309-315.

POINCARÉ, H. (1946): El valor de la ciencia. Buenos Aires: Espasa Calpe.

POLYA, G. (1966): Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos.

POLYA, G. (1992): Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

POOPER, K. (1973): La lógica de la investigación científica. Madrid: Tecnos. trad. Víctor Sánchez de Zabala. 3 reimpresión.

POPHAM, J. (1990): La evaluación basada en criterios. Madrid: Magisterio Español.

PUIG ADAM, P. (1956): Didáctica. Matemática. Eurística. Madrid: Institución de Enseñanza Laboral.

PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988): Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.

PUIG, L. y CERDÁN, E. (1996): «Un curso de heurística matemática para la formación del profesorado». Revista UNO, (8), 83-90.

PUIME, J. M. (1991): «Eficacia docente y valoración social». Escuela Española, n.° 3044, 11-IV.

REITMAN, W. R. (1965): Cognition and thought: An information processing approach. New York: Wiley

REY PASTOR, J. (1981): Elementos de Análisis Algebraico. Madrid: Biblioteca Matemática.

RIBOT, T. (1901): Ensayo sobre la imaginación creadora. Madrid: Victoriano Suárez.

RICO, L.; CASTRO, E. y CASTRO, E. (1995): Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

RILEY, M.; GREENO, J. y HELLER, J. (1983): «Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic». En H.Ginsburg (Ed.), The Development of Mathematical Thinking. New York: Academic Press.

ROGERS, C. (1982): Libertad y creatividad en la educación. Barcelona, Paidós.

ROMBERG, T. (1992): «Further thougts on the standards: A reaction to Apple». Journal for research in mathematics education, 23(5).

ROMBERG, T. y CARPENTER, T. (1986): «Research on teaching and learning mathematics. Two disciplines of scientific inquiry». M.C.Wittrock, Hanbook of research on teaching. New York: Macmillan Pub. Co. 850-873.

ROSENBAUM, L.; BEHOUNEK, K.J.; BROWN, L. y BURCALOW J. V. (1989): «Step into problem solving with cooperative learning». Arithmetic teacher 36(7), 7-11.

ROSSMAN, J. (1931): The Psychology of the invent. Washington.

ROUCHIER, A. (1985): «Didáctica de la medida del volumen en el segundo curso de la escuela secundaria». En La enseñanza de la matemática a debate. Madrid: MEC, 201-212.

RUBINSTEIN, S. L. (1966): El proceso del pensamiento. La Habana. Editorial Universitaria.

RUE, J. (1990): «Els agrupaments d'alumnes. Análisi de la modalitat de 'grups flexibles'», ponencia del 1 Congreso Interuniversitario de Organización Escolar. Barcelona, U.A.B.

RUSSELL, B. (1985): Escritos Básicos. Barcelona: Planeta-Agostini.

RUSSELL, B. (1988): Introducción a la Filosofía Matemática. Barcelona: Paidós.

SANTOS TRIGO, L. M. (1996): Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

SANZ, I. (1990): «Comunicación, lenguaje y matemáticas». En S.Llinares y M.V.Sánchez: Teoría y práctica de la educación matemática. Sevilla: Alfar, 136-173.

SARDUY, A. F. (1987): Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

SAWYER, W. (1992): «Does mathematics rest on facts?» En C.Ormell (Ed.): New thinking about the nature of Mathematics. MAG. University of East Anglia (44-47).

SCHON, D. (1987): La formación de profesionales reflexivos. Barcelona: Paidós.

SCHROEDER, T. y LESTER, F. (1989): «Developing understanding in Mathematics via problem solving». En NCTM: New directions for elementary school Mathematics. 1989 Yearbook. Virginia, 31-42.

SCHWARTZ, J. L. (1986): Intensive quantity and referent transforming

arithmetic operations. Cambridge. MIT (manuscrito).

SEMADENI, Z. (1984): A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. Educational studies in Mathematics. Vol. 15, 379-395.

SHOENFELD, A. (1985a): «Ideas y tendencias en la resolución de problemas». En La Enseñanza de la matemática a debate. Madrid: MEC.

SHOENFELD, A. (1985b): Mathematical problem solving. New York: Academic press.

SHOENFELD, A. (1987): «Confessions of an accidental theorist». For the Learning of mathematics, 7(1), 30-38.

SHOENFELD, A. (1988): «Mathematics, technology and higher order thinking». En R. S.Nickerson y P.P.Sodhiates (Eds.): Technology in education: looking toward 2020. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates (67-96).

SIKORA,J. (1979): Manual de métodos creativos. Buenos Aires: Kapelusz.

SIMON, H. A. (1973): «The structure of ill structured problems». Artificial Intelligence, (4), 181-201.

SIMPSON, R.M. (1922): «Creative imagination». AmericanJournal of Psychology (23).

SKEMP, R. (1980): Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: Morata.

SPERBER, D. y WILSON, D. (1986): Relevance: Comunication and cognition. Cambridge, Cambridge University Press.

SPIEGEL, M. R. (1994): Probabilidad y Estadística. México: McGraw-Hill.

STERNBERG, R. J. (1979): «The nature of mental abilities». American Psychologist (34), 214-230.

STERNBERG, R. J. (1983): «Criteria for intellectual skills training». Educational Researcher. 12 (2), 6-12.

STTUFFLEBEAM, D. L. y SHINKFIELD, A. J. (1987): Evaluación sistemática. Madrid: Paidós/MEC.

STUFFLEBEAM, M. D. (1988): Normas de Evaluación para programas, proyectos y material educativo. México: Trillas.

TAYLOR, D.T.; BERRY P. C. y BLOCK, C. H. (1958): «Does group participation when using brainstorming facilitate or inhibit creative thinking?» Administrator's science quarterly (3), 23-47.

TEJEDOR, F. J. (1984): Análisis de varianza aplicado a la investigación en Pedagogía y Psicología. Madrid: Anaya.

TEULE-SENSACQ, T. y VINRICH, G. (1982): «Résolution de problémes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques». Educational Studies in Mathematics (13) 177-203.

THOMPSON, C. y HENDRICKSON, A. (1986): «Verbal addition and subtration problems: Some difficulties and some solutions». Arithmetic Teacher. March, 21-25.

TORRANCE, E. P. (1976): La enseñanza creativa. Madrid: Santillana.

TRIADÚ, J. (1991): «Ia formación inicial: una utopía?» Crónica Dénsenyament, n' 33, 11.

VAN DALEN, D. B. y MEYER, W. J. (1983): Manual de técnica de la investigación educacional. Buenos Aires: Paidós.

VARIOS (1976): Educación General Básica. Madrid: Magisterio Español.

VARIOS (1992): Área de matemáticas. Educación Primaria. (Cajas rojas). Madrid: MEC.

VARIOS (1995a): «Resolución de Problemas: Investigación-acción en el aula». Revista del CPR Latina-Carabanchel/MEC, ñ 9.

VARIOS (1995b): El currículo en la LOGSE. Madrid: Comunidad de Madrid: Colección Cuadernos de divulgación, Vol. III.

VARIOS (1995c): Breve historia de la educación matemática en España. Madrid: SMPM, Enma Castelnouvo.

VARIOS (1998): Rendimiento escolar en Matemáticas en la provincia de Segovia. Segovia: Obra social y cultural de Caja Segovia.

VELASCO, J. (1996): Desarrollo del razonamiento lógico. Córdoba: UNED.

VELÁZQUEZ, M. F. (1995): «La relación entre cultura escolar y personalidad: delimitando la diversidad de género». Revista UNO, ñ 6. Barcelona: Graó.

VERGNAUD, G. (1983): Acquisition of mathematical concepts and processes. Orlando: Academic Prees.

VERGNAUD, G. (1991). El niño, las Matemáticas y la realidad. México: Trillas.

VIGOSTKY, L. S. (1973): Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. Ed. LEONTIEV y LURIA. Moscú, 1956. Trad. Cast., E.BENÍTEZ, Psicología y pedagogía. Akal. Madrid.

VIGOTSKY, L.S.; LEONTIEV A. y LURIA, A. (1989): El proceso deformación de la psicología marxista. Progreso. Moscú.

WALLAS, G. (1926): The art of thought. New York: Harcout Brace Jovanovich.

WASON, P. C. (1960): «On the failure to eliminate hypotheses in a conceptual task». Quarterly journal of experimental psycholog, (12), 129-140.

WEATLEY C. y G.WEATLEY (1984): «Problem solving in the primary grades». Arithmetics Teacher.

WITTGENSTEIN, L. (1987): Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.

WOODS, P. (1987): La escuela por dentro. Barcelona: Paidós.

WOODWORTH, R. S. y SELLS, S. B. (1935): «An atmosphere effect in formal syllogistic reasoning». fournal of Experimental Psychology, (18), 451-460.

ZABALZA, M. (1987): Didáctica de la Educación Infantil. Tomo 1 y II. Madrid: Narcea.

Juan Carlos Sánchez Huete es Doctor y Licenciado en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad Complutense de Madrid (1998). Diplomado en Profesorado de Educación General Básica (1984) - especialidad de Ciencias - y Maestro de Educación Física (1995) por la Escuela Universitaria «Don Bosco».

Ha ejercido la docencia como profesor de E.G.B. y Educación Primaria en el Centro «López Vicuña», de Madrid, como especialista en Ciencias y Educación Física (1986-2000). En 1998 se incorpora al Departamento del Área de Enseñanza e Investigación de Pedagogía - Teoría Didáctica y Métodos - del Centro de Enseñanza Superior en Humanidades y Ciencias de la Educación «Don Bosco», donde imparte clases en Magisterio, Educación Social y Psicopedagogía.

Ha publicado artículos y presentado comunicaciones y ponencias a cursos y congresos.

José Antonio Fernández Bravo es Diplomado en Magisterio por la especialidad de Ciencias. Licenciado en Filosofía Pura, centrando sus estudios en Lógica y Filosofía de la Ciencia. Doctor en Ciencias de la Educación, por la defensa de una tesis sobre resolución de problemas matemáticos que aporta, a la enseñanza de la matemática, innovadores principios didácticos.

Desde el año 1986 se interesa por la investigación en Didáctica de la Matemática, convencido de que hay aprendizaje cuando existe desafío que provoca en el alumno una necesidad a su «querer conocer». Ha publicado numerosos artículos y es autor de varios libros y materiales: Los números en color de G.Cuisenaire (1989); Didáctica de la matemática en Educación Infantil (1995); Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos (2000); La numeración y las cuatro operaciones matemáticas. Didáctica para la investigación y el descubrimiento a través de la manipulación (2002); Numerator. Un juego para aprender la numeración y las cuatro operaciones matemáticas (2002). Secuenciación de contenidos matemáticos 1. Proceso de enseñanza-aprendizaje de 6 a 8 años (2003) y varios cuentos para el aprendizaje de la matemática.

Es profesor universitario del Centro de Enseñanza Superior en Humanidades y Ciencias de la Educación «Don Bosco», adscrito a la Universidad Complutense de Madrid. Sus investigaciones, publicaciones, cursos y conferencias, gozan de un reconocido prestigio entre el profesorado, tanto en España como en otros países.

1 Moderna en cuanto al auge pedagógico y didáctico que tuvieron los nuevos enfoques de abordar las Matemáticas. La matemática, como ciencia no es nueva ni moderna. Comunicación personal de J.J.Arrieta Gallastegui, mayo de 1994.

'Vida Escolar (1976). N° 177-176. 1 Vida Escolar (1980). N° de marzo-abril. En 1976 el SITE (Servicio de Inspección Técnica de Educación) realizó

una evaluación de resultados de la enseñanza donde se pone de manifiesto que el mayor número de fracasos en la EGB se da, precisamente, en el área de Matemáticas y Ciencias (42% en centros estatales y 38% en los no estatales).

4 Lo correlativo en el pensamiento de hechos, datos y conocimientos ya adquiridos son, las sugestiones, inferencias, sentidos conjeturados, suposiciones y explicaciones de ensayo: las ideas, en suma. La observación y el recuerdo cuidadoso determinan lo que es dado, lo que está ya allí y, por tanto, asegurado. Pero esto no puede proporcionar lo que falta. Define, aclara y localiza la cuestión; pero no puede ofrecer su respuesta. La proyección, la invención, el ingenio sirven para ese propósito. Los datos suscitan sugestiones y sólo por referencia a los datos concretos podemos juzgar sobre la adecuación de las sugestiones. Pero las sugestiones van más allá de lo que todavía está dado realmente en la experiencia. Prevén los resultados posibles, las cosas por hacer, no los hechos (las cosas ya hechas). La inferencia es siempre una invasión de lo desconocido, un salto desde lo conocido. En este sentido, un pensamiento (lo que una cosa sugiere, pero no como se presenta) es creador: una incursión en lo nuevo. Supone algún espíritu de invención. Lo que se sugiere debe ser, en efecto, familiar en algún sentido; la novedad, la creación inventiva, se adhiere a la nueva luz en que es vista, al uso diferente al que se aplica (DEwEY 1998: 140).

5 Los maestros, siguiendo un método de «desarrollo», dicen a los niños que piensen cosas por sí mismos, como si ellos pudieran sacarlas de sus cabezas. El material del pensar no son los pensamientos, sino las acciones, los hechos, los sucesos y las relaciones de las cosas. En otras palabras, para pensar eficazmente debemos haber tenido, o tener ahora, experiencias que nos ofrezcan recursos para vencer la dificultad que se presenta. Una dificultad es un estímulo indispensable para pensar; pero no todas las dificultades provocan pensamiento. Algunas veces abruman, oprimen y desaniman. La situación de perplejidad tiene que ser bastante parecida a las situaciones que va se han encontrado, para que los alumnos tengan algún control sobre los medios de resolverla. Una gran parte del arte de la instrucción consiste en hacer la dificultad de los nuevos problemas lo bastante amplia como para provocar el pensamiento y lo bastante pequeña como para que, en medio de

la confusión que produzcan naturalmente los nuevos elementos, haya puntos luminosos familiares de los que puedan brotar sugestiones útiles (DEwEY, 1998: 138-139).

3 Esta condición podría generar dudas sobre el concepto «resolución». Resolver un problema implica tanto encontrar una solución, como demostrar la ausencia de ésta. Admitimos la condición de Kelinger desde un proceso histórico de la investigación, dentro del cual se admite, a priori, la posibilidad de encontrar una solución viable.

6 A través de un Seminario de Formación realizado para la investigación de las causas de los errores que cometen los escolares en el área de Matemáticas. Participaron 10 profesores de seis Centros del distrito Latina-Carabanchel de Madrid.

7 (SCHOENFEL), 1985a:7,8): «El primero nos llega por medio de dos números especiales de la revista Educational Studies in Mathematics ESM (Estudios Educativos de Matemáticas). En mayo y agosto de 1978, ESM publicó un informe elaborado para la «International Commission on Mathematical - ICMI» (Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas) bajo el título «Change in Mathematics Education Since the Late 1950 - Ideas and realizations» (Cambios en la enseñanza de las Matemáticas desde finales de la década de los cincuenta - Ideas y logros). Este estudio contiene artículos sobre las tendencias en la enseñanza de las Matemáticas en Australia, Bangladesh, Francia, Gran Bretaña, India, Irán, Países Bajos, Nigeria, Polonia, Sierra Leona, Sr¡ Lanka, Sudán, Tailandia, Estados Unidos y las Indias Occidentales. Como tal sirve de guía para conocer «el estado actual de la materia» en el plano internacional en 1977. Estoy bastante seguro de que el término «resolución de problemas» no aparece en absoluto en el informe del ICMI, con el significado que tiene hoy Casi todos los artículos que contiene el informe centran su atención en el aspecto más significativo de los planes de estudios desde los años 1957 hasta 1977: las nuevas matemáticas. Dichos artículos se centran en lo que se había intentado y cómo funcionó o si falló. La resolución de problemas no aparecía por ninguna parte.

El segundo testimonio llega a través de los documentos preparados para el «IV International Congress on Mathematical - ICME 4» (IV Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas) que se celebró en Berkeley, en agosto de 1980. «1... 1 Por más que busqué en el programa, al final no encontré más que una sola sesión dedicada a la solución de problemas; solamente había esta y se había incluido bajo la categoría de "aspectos poco comunes de los planes de estudio'. Cuando el ICíME 5 se reúna en Australia en agosto de 1984, la resolución de problemas será uno de los principales temas del Congreso.»

6 Ja resolución activa de problemas es considerada como el método más conveniente de aprender Matemáticas; es la aplicación de las Matemáticas a diversas situaciones. I,as situaciones-problema presentadas pueden ser más o menos complejas, pueden aparecer con datos completos o incompletos, pueden tener una solución o varias, estar presentados de forma gráfica o no, con datos numéricos o sin ellos... Los problemas elegidos en la escuela deberán sacarse de situaciones que partan de la realidad de los alumnos, excluyendo enunciados que reproduzcan estereotipos sexistas (situaciones de la vida cotidiana del colegio, de la economía familiar, con juegos y juguetes, con deportes...), que provoquen su interés y que mantengan su atención, y de situaciones imaginadas que sean sugerentes y atractivas para el niño. Es interesante proponer problemas abiertos con dificultades crecientes, de manera que sea posible hacer conjeturas, buscar analogías y referirlos a situaciones más generales para que pueda encontrar respuesta a las nuevas situaciones-problema que se plantean» (Vnaios, 1992: 92).

9 En más de 400 casos se ha analizado el concepto de «problema matemático» que tienen los niños de edades comprendidas entre los 9 y los 12 años, contrastándolo con su forma de actuar en la resolución de éstos. Puede consultarse FERNÁNDEZ BRAVO (1999B) y FERNÁNDEZ BRAVO (2000a).

10 «... la acción mutuamente orientada de dos o más participantes de la actividad (comunicativa], cada uno de los cuales actúa como sujeto, como individuo. En cuanto la atención de la persona se dirige a otro objeto, la comunicación es sustituida por otra actividad y se restablece sólo después de

que el individuo se dirige nuevamente a su interlocutor» (LísiNA, 1987. En DAvínov 1988: 275]).

ii al,a atención del maestro debería centrarse en el pensamiento del niño y no en su capacidad para escribir respuestas correctas. El pensamiento de los niños se desarrolla a partir de su intuición y su lógica naturales, y los educadores deberán favorecer este desarrollo en vez de buscar las definiciones de objetivos ajenos a esta manera de pensar» (KaMn, 1993: 97).

14 En algunas ocasiones (más de las que se pueden desear) nos encontramos con que en este tipo de problemas, los autores no aclaran bien el estado intermedio y el final, identificando éstos y creando confusión. Así, por ejemplo: «En una cesta hay 8 huevos. Se rompen 5. ¿Cuántos huevos quedan en la cesta?». La respuesta que aportan es 3 (8 - 5). Sin embargo, la respuesta es 8. En la cesta quedan los huevos que tenía; ya rotos, ya sin romper.

12 En la mayoría de los textos consultados aparecen ejemplos de este tipo que se redactan de la siguiente forma: «Alicia tiene 7 cromos. Aurora le da 3 más. ¿¿Cuántos cromos tiene ahora Aurora?». Creemos que esta expresión no se corresponde con la operación que se aplica para resolver el problema: 7 + 3 = 10. Si analizamos el texto, observamos que genera ambigüedad la palabra «más». ¿Qué significa? ¿Le regala 3 cromos más de los que tiene? ¿Le regala sólo 3 cromos? Si le regala sólo 3 cromos, para qué la palabra «más»; el verbo «regalar» ya implica el cambio, y el orden de secuenciación de las proposiciones, en relación con la pregunta, lleva implícita una acción sumativa. Si despreciásemos el significado de la palabra «más» en el texto del problema, tendríamos que despreciar, por razones similares, otros significados. ¿Cómo resolveríamos este problema: «Alicia tiene 7 cromos. Aurora le da 3 menos. ¿Cuántos cromos tiene ahora Alicia?». Esto nos hace observar que el estado intermedio de muchos problemas de cambio no está bien aclarado.

13 Este ejemplo aparece también en muchos textos cuyos autores explican la importancia de la precisión del lenguaje para que los estados estén bien aclarados. Si observamos la pregunta, percibimos que el estado final está confuso respecto a los datos expresados en los estados anteriores: Si A tiene a

cromos y se pregunta por lo que necesita para tener b, la respuesta es, simplemente, b. Otra cosa sería si se preguntase por los cromos que le faltan a A para tener un total de b cromos.

15 En los problemas de Combinación el «Todo» debe estar formado por las «partes» que se expresan en una situación problemática, y sólo por esas. Este descuido hace que algunos autores cometan un error al enunciar una situación problemática de Combinación del tipo 2, así en PUIG y CERnÁIS (1988: 101) podemos leer: «Hay a hombres. Hay b personas. ¿Cuántas mujeres hay?». Estamos seguros de que se refiere a varones y hembras como partes del todo. Pero esta interpretación no se da de forma precisa a través de la lectura del problema, dando lugar a diversas interpretaciones, entre las cuales bastaría decir que faltan datos para resolver el problema. El concepto «hombre» tiene una connotación cultural de «adulto», del mismo modo que el concepto «mujer». La palabra «personas» puede incluir a hombres, mujeres, niños y niñas. Entonces, el hecho de que haya a hombres y b personas no nos permite saber el número de mujeres porque, bajo nuestra interpretación, hemos formado al «todo» con más clases de las que hay expuestas; desconocemos el número de niñas y el número de niños. Nada de lo dicho tendría relevancia si el «todo» estuviese bien aclarado en la situación problemática, así por ejemplo: «Sólo hay hombres y mujeres. Hay..».

16 Hemos copiado textualmente «inventividad», aunque somos conscientes de que la traducción no es correcta; debería decir «inventiva».

17 M.DE GuziiÁN (1991h) define protocolo como «el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema».

16 «Durante quince días me esforcé en probar que no podía haber ninguna función como las que desde entonces he llamado funciones fuchsianas. Entonces era muy ignorante; me sentaba cada día a mi mesa de trabajo, me quedaba una o dos horas, intentaba un gran número de combinaciones y no obtenía ningún resultado. Una tarde, contrariamente a mi costumbre, tomé café y no me podía dormir. Las ideas me asaltaban a montones; las sentía enfrentarse hasta que se combinaron a pares, por así decir, formando una

combinación estable. A la mañana siguiente había establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas, las que provienen de las series hipergeométricas; sólo tenía que escribir los resultados, lo cual apenas me tomó unas horas. Entonces quise representar esas funciones por el cociente de dos series; esta idea era perfectamente consciente y deliberada, pues me guiaba la analogía con las funciones elípticas. Me pregunté qué propiedades tendrían estas series si existieran y así logré sin dificultad formar la serie que he denominado theta-fuchsiana. Justo para esta época dejé Caen, donde estaba viviendo, y me fui a una excursión geológica bajo los auspicios de la escuela de minas. Los cambios del viaje me hicieron olvidar mi trabajo matemático. Cuando llegamos a Countances, subimos a un autobús para ir a algún sitio. En el momento en que puse el pie en el primer escalón surgió la idea, sin que nada en mis pensamientos anteriores le hubiera preparado el camino, de que las transformaciones que había utilizado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no-euclideana. No verifiqué la idea; no hubiera tenido tiempo, pues una vez que tomé mi asiento en el autobús, seguí con una conversación que ya había comenzado, pero sentía una seguridad absoluta. Cuando regresé a Caen, por motivos de conciencia, verifiqué el resultado a mi gusto.»

19 Las fases de Wallas se aplican con éxito al proceso de pensamiento, como se observa en las introspecciones del matemático POINCARÉ (1913) presentadas en la cita anterior. Los primeros quince días de pensamiento son para Poincaré el período de preparación; la preparación continúa como ideas «en conflicto hasta que se unen por pares», y sigue inmediatamente la iluminación y la verificación. En la segunda fase, la preparación se continúa por la iluminación y la verificación, aparentemente sin que se produzca una irrupción súbita del insight (ajá). La tercera parte de la introspección completa los cuatro estadios de Wallas, incluyendo un período de incubación (durante la excursión geológica) y una súbita irrupción del insight en el período de iluminación.

` El problema del tumor de Duncker se enuncia de la siguiente forma: 'Dado un ser humano con un tumor de estómago inoperable, y rayos que destruyen el tejido con suficiente intensidad, ¿qué procedimiento se puede utilizar para librarle del tumor con estos rayos y al mismo tiempo evitar destruir el tejido

sano que lo rodea?».

21 «Para explicar la acción debemos saber cuáles fueron las consideraciones que le convencieron de que debía actuar del modo en que lo hizo» (DRAY 1957: 122).

22 «Se entiende por variable sintáctica cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema» (Pule y CERDÁN, 1988: 31).

23 «Se hacen constantes llamamientos a la necesidad de una correcta expresión... El lenguaje utilizado en todo momento en la presentación de la actividad Resolución de problemas] debe cuidarse al ser una de las fuentes principales de dificultad que encuentran los alumnos» (Busoco NIETO, 1991: 36).

24 En el enunciado de una situación problemática se encuentran conceptos y juicios. Los conceptos se expresan con palabras que reflejan los indicios sustanciales de un objeto o una clase de objetos homogéneos: «Triángulo», «Libro»... Los juicios afirman o niegan algo respecto a esos objetos: «El libro cuesta 6 euros», «El triángulo tiene un área equivalente a 32 centímetros cuadrados». La pregunta de la situación problemática dirige el razonamiento hacia lo que se desea saber o conocer, dejando al margen todas aquellas conclusiones que se puedan inferir y que no tengan contexto en la canalización de la respuesta a la pregunta de la situación problemática.

25 «Otro factor que conduce al descuido de la lógica en el aula, es la tendencia de muchos educadores a interpretar el popular método de aprender resolviendo problemas, en términos preponderantemente psicológicos. Dichos problemas han sido considerados dificultades en el camino de la acción, antes que dilemas intelectuales, y se estiman resueltos cuando el alumno se siente capaz de volver a actuar. El criterio de solución no es la satisfacción de ciertas demandas intelectuales inherentes al problema, sino el sentimiento del alumno de que su dificultad ha sido superada. En vez de enseñar al estudiante a razonar correctamente, los maestros tratan de incrementar su confianza y flexibilidad, fundándose en que de esta manera

estará mejor equipado para disponer de las dificultades que se le interpongan en el camino de la acción. Debería observarse nuevamente que Dewey y otros se opusieron a esta aplicación predominantemente psicológica del método de aprender resolviendo problemas, pero entre los maestros que no tienen una buena preparación lógica sus voces han tendido a ser desoídas» (KNELLER, 1969: 113).

26 Es interesante señalar los tres postulados de Aristóteles para la metodología de las ciencias deductivas, debido a que, en lo que se refiere a las distintas disciplinas que constituían las Matemáticas griegas, estos postulados se cumplen en medida notable, incluso los cumplen las teorías matemáticas contemporáneas. Tener esto en cuenta puede ser de gran utilidad para el ámbito didáctico.

27 RIBOT (1901: 169).

'9 Lo que para Descartes constituye la diferencia esencial entre el silogismo y el razonamiento matemático es que aquél, partiendo de premisas universales, da lugar inmediatamente a una conclusión igualmente universal, en tanto que el razonamiento matemático hace intervenir una fase intermedia, que consiste en la contemplación de un objeto individual; en efecto, según una observación de las Respuestas a las segundas objeciones: «lo propio de nuestro espíritu es formar las proposiciones generales del conocimiento de las particulares». Tal fase intermedia, caracterizadora del razonamiento matemático con respecto al silogismo, apela a la intuición, como se aprecia en la Regla XIV: «Esta idea común no pasa de un objeto a otro más que merced a una simple comparación, por la cual afirmamos que la cosa buscada es, en tal o cual respecto, semejante, igual o idéntica a la cosa dada; de manera que en todo razonamiento no conocemos exactamente la verdad sino por comparación. Por ejemplo, en éste, todo A es B, todo B es C, luego todo A es C, se comparan entre sí la cosa buscada y la dada, es decir, A y C, en cuanto a la relación que una y otra guardan con respecto a B, etc. Pero puesto que las formas del silogismo no sirven para nada en cuanto a percibir la verdad, no será inútil al lector, tras haberlas rechazado completamente, el percatarse de que todo conocimiento que no se adquiere por la intuición pura y simple de un objeto aislado se adquiere por comparación entre sí de dos o

más objetos».

26 Kant en la Crítica de la Razón Pura (1961: tomo II, 338, 339) trata la cuestión de determinar la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera. «Sea ahora el geómetra el que se propone tal cuestión. Comenzará inmediatamente por construir un triángulo; como sabe que dos ángulos rectos tomados juntamente valen exactamente lo mismo que todos los ángulos adyacentes juntos que pueden trazarse a partir de un punto sobre una línea recta, prolonga un lado del triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes que, en junto, son iguales a dos rectos; ahora divide el exterior de estos ángulos trazando una línea paralela al lado opuesto del triángulo, y advierte que así se forma un ángulo adyacente exterior que es igual a uno interior, etc. De este modo, a través de una cadena de deducciones y conducido siempre por la intuición, llega a una solución del problema completamente esclarecedora y, a la vez, general. Así pues, sólo las Matemáticas contienen demostraciones, pues extraen sus conocimientos no de conceptos, sino de su construcción, esto es, de la intuición que cabe presentar a priori como correspondiente a ellos... demostraciones que, como indica la expresión, proceden en la intuición del objeto».

3o Número de contar. Para empezar, es el desenvolvimiento en el tiempo de la sucesión de los números naturales, cuyos primeros pasos son tan arduos para los niños como aprender los nombres de los co- lores y de las letras, hasta que aprehenden de repente la secuencia como totalidad que continúa ilimitadamente, una aprehensión conceptual que no tiene su análogo en el aprendizaje de los nombres de los colores y las letras. El número de contar se convierte en el objeto irremplazable de la actividad de calcular. Pronto se siente la necesidad de contar hacia atrás, hacia el pasado, esto es, mediante números negativos. El número de contar, llamado matemáticamente el número ordinal, se formaliza en la inducción completa, y ulteriormente en los axiomas de Peano; su apoteosis son los ordinales transfinitos.

31 «Hay una enorme diferencia entre la manera en la que nosotros trabajamos las Matemáticas y la manera en la que lo ven nuestros alumnos. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de alcanzar a comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos

concretos. Primero dominamos una parte; según avanzamos, la intuición se desarrolla, comenzamos a creer que vamos por buen camino. I.o verificamos con ejemplos, buscamos los ejemplos contrarios, intentamos enjuiciar el por qué vamos por buen camino. Cuando creemos que sabemos por qué funciona, probamos a demostrarlo. Este ensayo puede tener o no tener éxito. Podemos comenzar por un camino equivocado; sufrir algún revés, tener que batirnos en retirada, hacer modificaciones. Con perseverancia y suerte, el resultado termina por poner cada cosa en su sitio. Pocas experiencias son tan gratificantes o emocionantes, hemos explorado terrenos desconocido y nos hemos enriquecido al hacerlo. 1Pero la realidad en el aula es distintas No existe la emoción por descubrir algo nuevo, sino simplemente la (pequeña) satisfacción de adquirir ciertas habilidades. Como el manejar las Matemáticas parece cosa fácil en nosotros, al ver lo difícil que es para ellos, los alumnos se sienten incapaces. No tienen idea de que nosotros, también, hemos de esforzarnos por entender ideas matemáticas nuevas y, lo que es aún más importante, no tienen ni

32 Principio de variabilidad. Cuando en la formación de un concepto aparezcan diferentes variables, se debe hacer variar éstas de todos los modos posibles. Precisamente comparando las construcciones realizadas en cada caso es como podrá destacarse lo que en todas ellas queda invariante, que será lo que haya que extraer para la formación del concepto que interesa.

33 WASON (1960); JOHNSON-LAIRD y STEEDMAN (1978) mostraron, en su día, cómo los sujetos tienen una gran dificultad en actuar racionalmente buscando contraejemplos y, mayoritariamente, se dedican a confirmar la evidencia. Proponen dos posibilidades (VELASCO, 1996: 143).

34 «En la vida académica la técnica de preguntas ya se ha constituido en un elemento didáctico inevitable. Especialmente en la educación básica. Maestro que no utiliza la pregunta, tiene pocas posibilidades de ejercer una docencia eficaz. 1... 1 Con las preguntas, si eran motivadoras, se estimulaba la participación del alumnado, rompiendo su inicial indiferencia. El buen profesor llevaba con mano segura la clase mediante un rico juego de preguntas colectivas e individuales, dirigidas a los más interesados y a los que parecían menos participativos, a los más preparados y a los que tenían

menos formación, inquiriendo sobre centros de interés de los escolares para llevarles al tema central. El docente documentado, meramente expositor y aun echando mano de otros artificios didácticos, sin el recurso al diálogo, se encontraba en clara minusvalía al intentar la participación de la clase. En el rendimiento final, en el alto nivel de aprendizaje, contribuye en buena proporción el diálogo dirigido por los objetivos didácticos. Por supuesto no todas las materias y niveles tienen las mismas exigencias, pero preguntar -dentro y fuera de la clase- es un arte, que permite al profesor descubrir y actuar eficazmente sobre esa realidad, sacra y móvil, que es el alumno.»

36 Nos preguntamos si no serían válidas estas condiciones para empezar a resolver problemas en la clase de Matemáticas. Considérese la posibilidad de partir de un problema abierto y sin números: «Una pelota está encima de un armario. Otra pelota está encima de una silla. Esas pelotas se caen. ¿Qué pelota llegará antes al suelo?». O abierto y con números: «Roberto tiene monedas de peseta. Julia tiene monedas de cincuenta céntimos de euro. ¿Quién de los dos tiene más dinero?».

31 Obsérvese que en los cursos de resolución de problemas suele ser al revés: Los alumnos resuelven los que elige el profesor.

37 «El análisis nunca va aislado de la síntesis; en cuanto se han extraído unos elementos mediante el proceso analítico, de inmediato se establecen relaciones entre ellos. El aislamiento de ciertos conjuntos presupone una combinación de elementos en conjunto, cierta síntesis; la síntesis se realiza tan pronto como el análisis está lo suficientemente desarrollado. La nueva realidad obtenida mediante la síntesis se somete a análisis; se crea una nueva conexión entre ésta y los hechos anteriormente conocidos. Por consiguiente, los intentos de aislar artificialmente el análisis y la síntesis en el proceso de enseñanza están condenados al fracaso» (VIGOTSKY, 1973: 193).

38 «La solución de problemas de naturaleza conocida entra a diferencias en la actividad analítico-sintética. Cuando el estudiante resuelve cierto número de problemas del mismo tipo, llega a discernir relaciones entre los elementos, aislándolas de los detalles concretos del texto. Estas relaciones, aisladas en el proceso de análisis, están repetidamente enlazadas con cierto sistema de

operaciones aritméticas y esta conexión ayuda a encontrar los valores buscados. La base psicológica, en este caso, es la formación de un sistema específico de conexiones temporales (reflejos condicionados) que progresivamente se vuelve más estable, poniendo al escolar en situación de actuar más fácilmente, de modo más automático; es lo que Pavlov llamaba un estereotipo dinámico. Para crear una capacidad en la solución de los problemas es necesario formar varios sistemas de conexiones temporales o estereotipos. La solución de problemas de estructura conocida se basa, por lo tanto, en la reproducción de conexiones precedentes. La solución de nuevos problemas presupone, en cambio, la formación de nuevas conexiones, lo cual entraña un análisis muy concreto. El análisis de las relaciones funcionales se encamina a la búsqueda de regularidades que aclaren las conexiones existentes entre lo dado y lo que se busca. El análisis de los diversos hechos y de la relación funcional existente entre ellos permite descubrir algunas relaciones entre hechos y elegir, por lo tanto, la operación necesaria. Sólo son productivas las operaciones y las síntesis que llevan a la respuesta buscada, o sea, las síntesis operadas sobre la base de un análisis anticipador y diferenciado. Ha de recordarse que las palabras son estímulos multiformes; la misma palabra puede estar ligada en un problema con cierta operación aritmética, y en otro problema, con una operación distinta. Si el alumno se habitúa a usar una determinada palabra como criterio para la elección de una operación aritmética, cometerá errores.»

39 Para PIAGET (1968: 119) la noción misma de una heurística presenta un carácter paradójico.

41 En la investigación sobre el material de G.Cuisenaire «Los Números en Color» se recogen algunos de estos modelos de invención de problemas en los que se dejaba ver una participación del alumno y una elección de estrategias de resolución. Estos modelos no se publicaron en FERNÁNDEZ Bttnvo (1989) por considerar que no eran los suficientes, ni estaban profundamente tratados. No obstante, se incluyeron en la obra mencionada al inscribirla en el Registro General de la Propiedad Intelectual de Madrid el día 30 de mayo de 1988, con el número de inscripción: 01788. En el año 1991 se había adelantado bastante en la recopilación de modelos de intervención para evitar dificultades en la resolución de problemas matemáticos. Esa

investigación terminó con la creación de un programa en el que se incluían los diversos tipos de situaciones problemáticas, secuenciados por grado de dificultad, adaptándolos a las distintas edades de los escolares (1999h). La Metodología Didáctica de aplicación en el aula y los diversos tipos de situaciones problemáticas para los escolares se pueden encontrar en (2000 a).

40 «y la experiencia dice que estos mismos enunciados (los derivados de la interpretación infantil a partir de expresiones matemáticas) son muchas veces punto de arranque de otras cuestiones importantes, como deben ser auténticamente los verdaderos. 1...1 En una segunda etapa, ya dirigida, no partiremos de igualdad alguna, sino que pediremos enunciados tales que para responder a la pregunta planteada hayan de realizarse operaciones fijadas; por ejemplo, pediremos enunciados que exijan una adición y una multiplicación; que exijan dos adiciones; una sustracción y una multiplicación, etc. Esta actividad permite profundizar en muchas direcciones en el estudio de las propiedades de las operaciones, porque al no precisar el orden en que se exigen, un alumno puede dar como esquema de su enunciado (a x b + c), otro dar como esquema del suyo a. (b + c), etc., y los modos como hay que alterar un enunciado para pasar al otro motivan observaciones de los alumnos ricas en consecuencias. Este modo de proceder hace que los niños comprendan en profundidad lo que es un problema, porque los han planteado antes de tener que resolver otros que le proporciona el Maestro y así nunca son trampas engorrosas que se le presentan. ¡... Después de la etapa que se ha descrito, resulta muy conveniente que los niños superpongan un problema a otro u otros varios para redactar finalmente un enunciado total. De esta manera nos encontramos con que los problemas que plantean y resuelven los niños acaban pronto por ser mucho más "difíciles" que los que suelen aparecer en las colecciones de problemas escolares. 1...1 Tradicionalmente, es sólo el maestro quien plantea los problemas, y se le suele aconsejar que lo haga utilizando estrictamente los datos precisos. El adulto que estudia Matemáticas sabe que así aparecen también los que se le ofrecen a él y este convenio tiene como base más lo que suele llamarse elegancia de planteo que otra cosa. Pero ni en el mundo de la investigación ni en el de las aplicaciones, ni aun siquiera en el de las relaciones humanas, surgen los problemas con tal limpieza conceptual de enunciado, sino que es el propio investigador quien ha de seleccionar los datos prescindiendo de los superfluos o eliminando los

contradictorios» (AizPÚN, 1972: 127-129).

42 Obsérvese que estas estrategias expuestas en este apartado, tanto aditivas como multiplicativas, no son las que el niño realiza, sino las que el niño expone. Los métodos de enseñanza utilizados son precursores de estas actuaciones. Hasta ahora la escuela no ha tenido opción a que el pensamiento del alumno se exprese mediante lo que él inventa, sino mediante lo que él aprende. Es muy difícil asegurar la validez de una estrategia desde un actuar naturalmente debido a que el sistema opera incoscientemente en la actividad mental del sujeto. Situándonos en el ejemplo desde el que hemos abierto esta nota, no comprendemos por qué el niño lee la expresión matemática «4 x 2» de derecha a izquierda, cuando los ensayos en el aula realizados por nosotros, han mostrado con claridad la tendencia general de leer esa expresión como: '<cuatro veces dos», expresándolo gráficamente mediante dos puntos, cuatro veces, y no al revés como nos muestra Baroody

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y BASES PSICOPEDAGÓGICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

(Juan Carlos SÁNCHEZ HUETE)

- La construcción de las matemáticas y su necesidad
- Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Proceso didáctico en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas
- Principios del aprendizaje
- Tipos de aprendizaje matemático
- Tratamiento en los libros de texto actuales de los cuatro tipos de aprendizaje matemático
- Conclusiones finales

SEGUNDA PARTE

FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y BASES PSICOPEDAGÓGICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

(José Antonio FERNÁNDEZ BRAVO)

- Introducción: la cuestión sobre el conocimiento o los problemas científicos
- Interés por la resolución de problemas en la educación matemática
- Relaciones y controversias entre la definición de problema matemático y su educación matemática
- Clasificación de problemas matemáticos simples
- Protocolo para la resolución de problemas: estructura, descripción y análisis de las fases
- Variables intervinientes en el estudio de la resolución de problemas
- Métodos, técnicas y estrategias para la resolución de problemas matemáticos

EDITORIAL CCS
Alcalá, 166 / 28028 MADRID
☎ 91 725 20 00 / 91 726 25 70
www.editorialccs.com / sei@editorialccs.com

ISBN: 978-84-8316-641-3
9 788483 166413